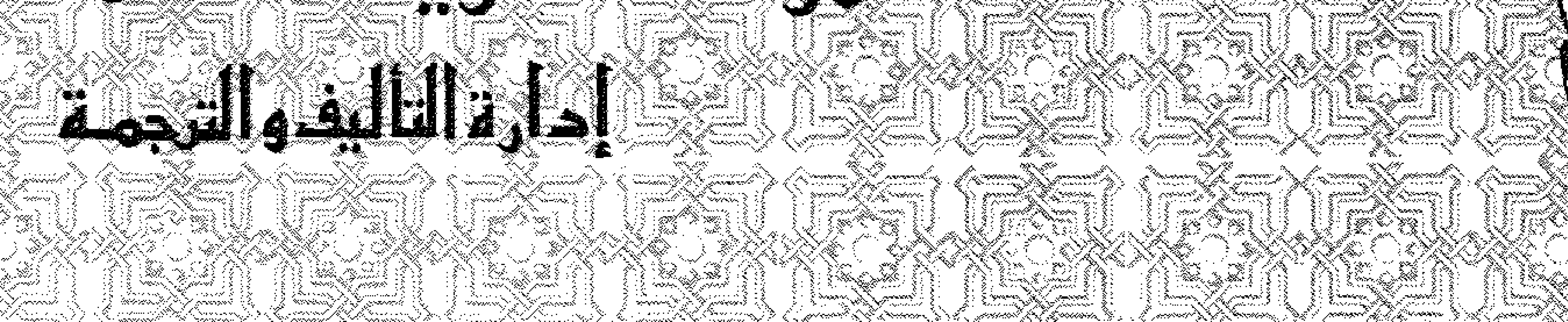
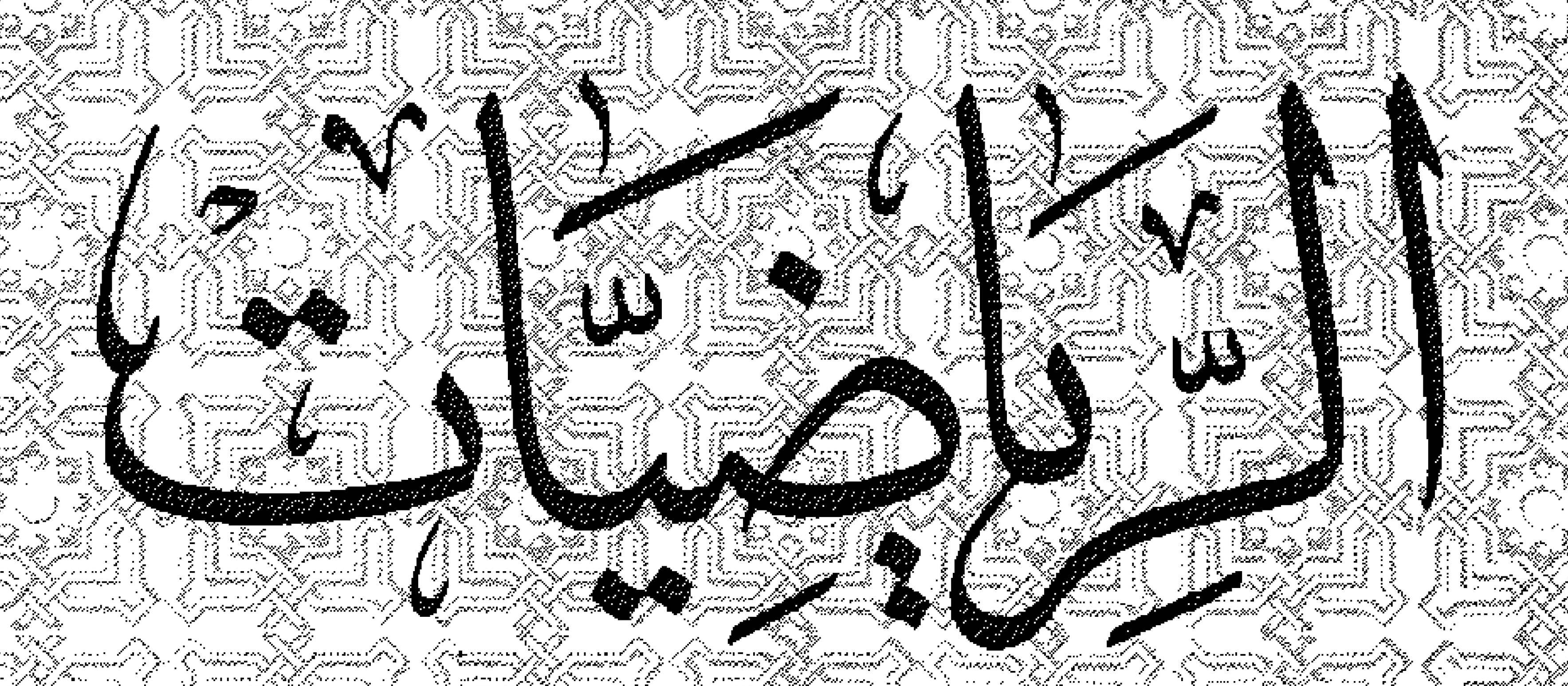
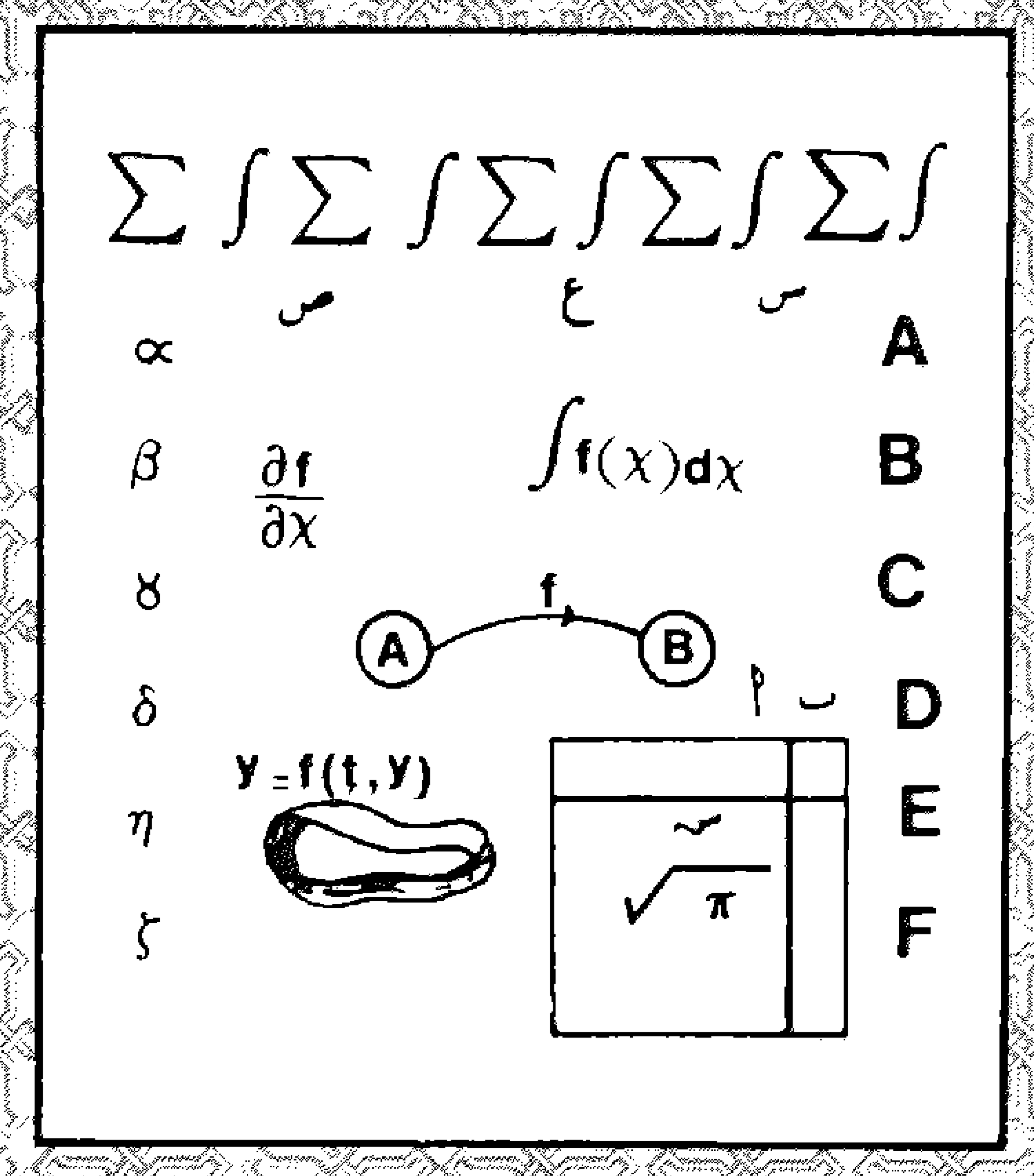






رئيس لجنة التأليف:

د. فوزي مصطفى دنان

الأعضاء:

د. سعد طه باقر

د. صابر نصر العايدي

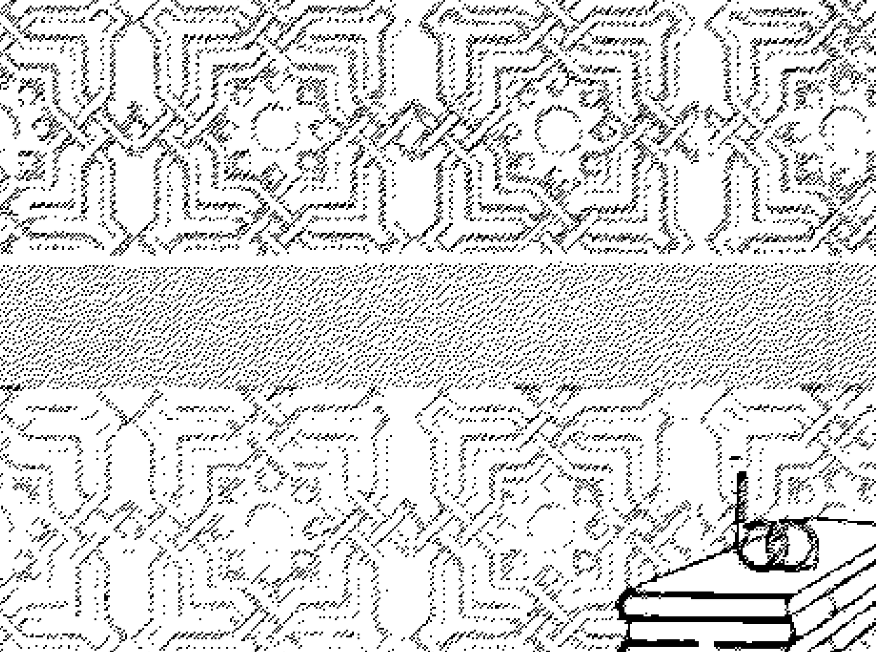
د. هاني رضا فران

مستشار الموسوعة:

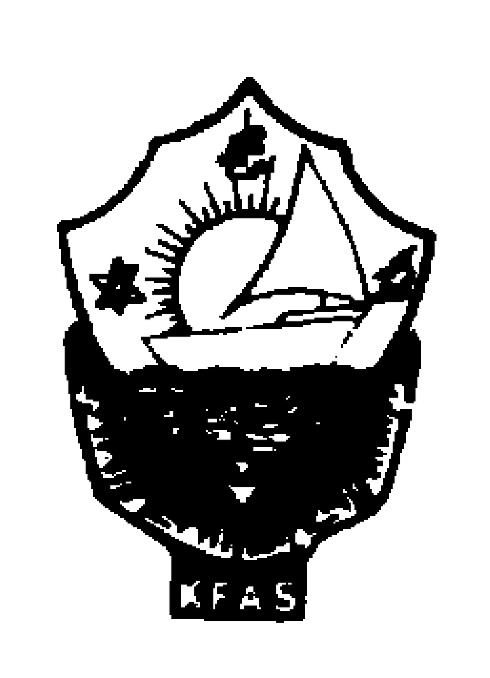
د. عدنان السيد هاشم العقيل

الجزء الثالث

من (ض) إلى (ل)



الكويت



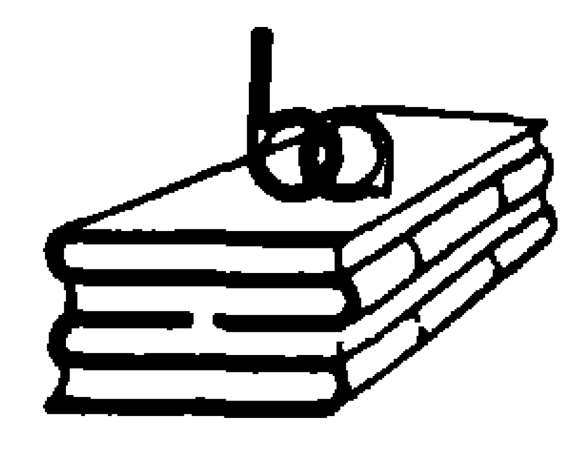
مؤسسة الكويت للتقدم العلمي
إدارة التأليف والترجمة
موسوعة الكويت العلمية

موسوعة الرياضيات

الجزء الثالث

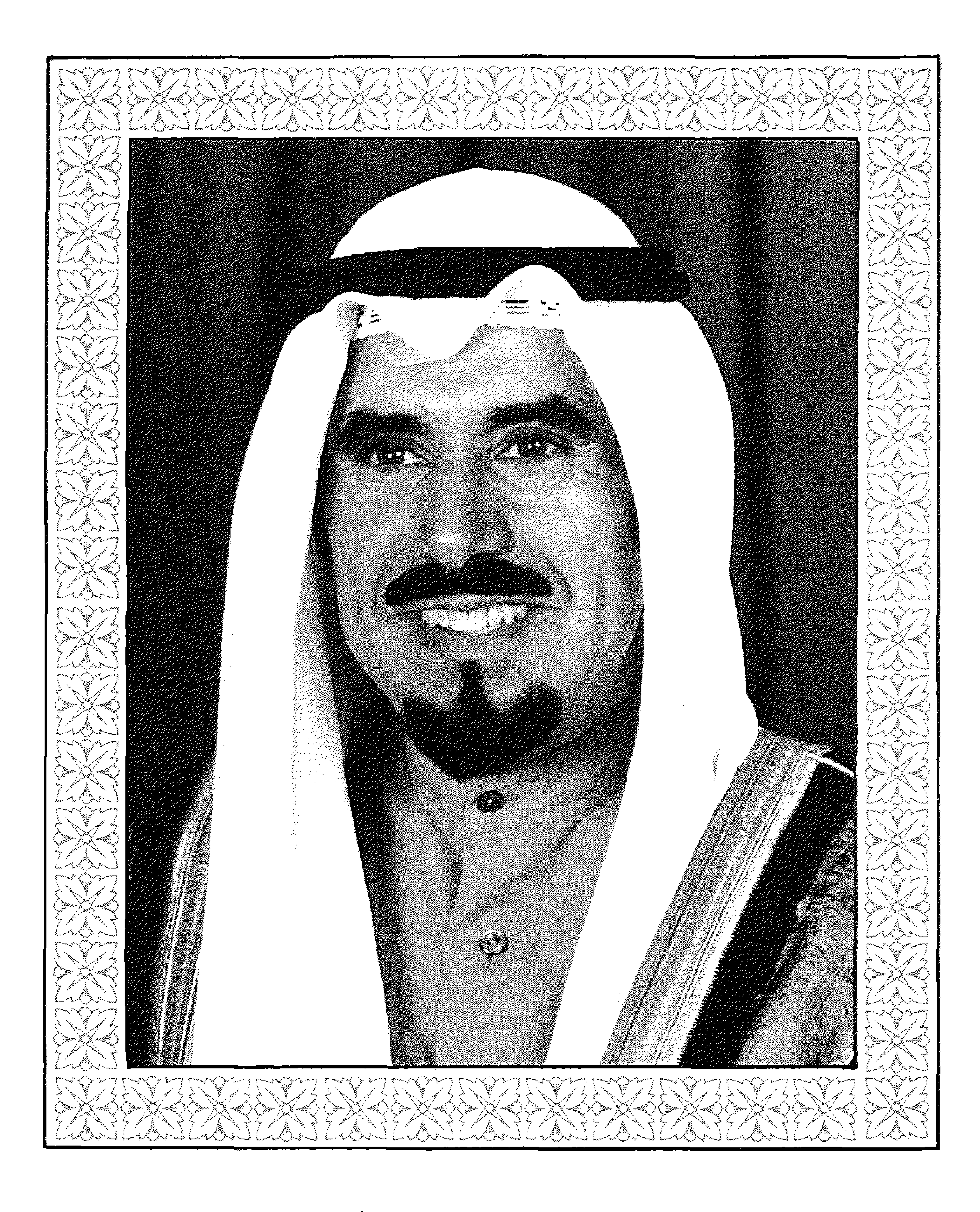
من (ض) إلى (ل)

رئيس لجنة التأليف :
د. فوزي مصطفى دنان
الأعضاء :
د. سعد طه باقر
د. صابر نصر العايدي
د. هاني رضا فران
مستشار الموسوعة :
د. عدنان السيد هاشم العقيل



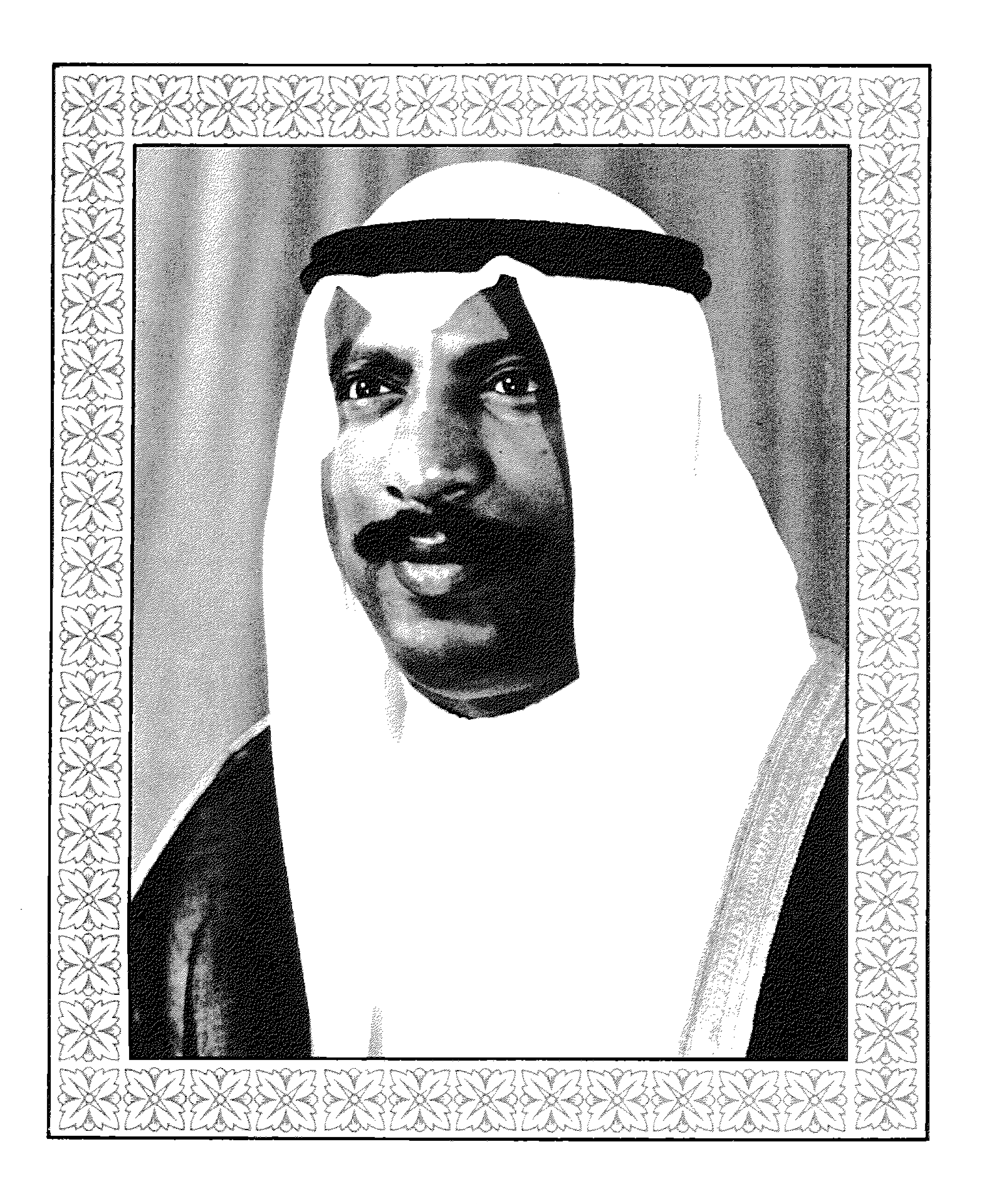
كاتب وكتاب
الطبعة الأولى
١٩٨٤
الكويت

الطبعة الأولى
١٤٠٤هـ
١٩٨٤ م



صاحب السمو الشيخ جابر الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت



سمو الشيخ سعد العبدالله السالم الصباح
ولي العهد ورئيس مجلس الوزراء

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ لِتَبْتَغُواْ فَضْلاً مِّن رَّبِّكُمْ وَلِتَعْلَمُواْ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ﴾ .

(صدق الله العظيم)

سورة الإسراء: آية ١٢.

الفهرست العام لموسوعة الرياضيات

الجزء الأول : من (أ) إلى (ت)

تقديم موسوعة الرياضيات 11

مقدمة موسوعة الرياضيات 13

الحرف (أ) 15

الحرف (ب) 155

الحرف (ت) 211

الجزء الثاني : من (ث) إلى (ص)

الحرف (ث) 361

الحرف (ج) 387

الحرف (ح) 435

الحرف (خ) 469

الحرف (د) 495

الحرف (ذ) 547

الحرف (ر) 555

الحرف (ز) 591

الحرف (س) 613

الحرف (ش) 657

الحرف (ص) 683

فهرست هذا الجزء

الجزء الثالث : من (ض) الى (ل)

الحرف (ض) 697

الحرف (ط) 707

الحرف (ظ) 731

الحرف (ع) 753

الحرف (غ) 791

الحرف (ف) 813

الحرف (ق) 859

الحرف (ك) 925

الحرف (ل) 987

الجزء الرابع : من (م) إلى (ي)

الحرف (م) 1021

الحرف (ن) 1423

الحرف (هـ) 1469

الحرف (و) 1489

الحرف (ي) 1517

تقـديم موسوعة الرياضيات

إن في تـراثنا العـربي الإسلامي كنـوزاً من الكلمات والمصـطلحات والتراكيب وأدوات التطوير، وأساليب للإثراء والنمو. تشكل معينًا لا ينضب من الألفاظ التي تجعل لغتنا العربية وعاء لا يضيق بمعنى، وتعبيرًا لا يقصر عن دلالة، ورحابة لا تعجز عن احتواء الجديد.

«وإذا كان العرب اليوم قد قصّروا لأسباب متنوعة ومتعددة، عن خدمة لغتهم وقعدوا عن إدامتها وإثرائها، فإن هذا لا يعني أنها أصبحت كذلك لأنها في الأصل كذلك. وقديماً قيل: عدم العلم بالشيء لا يلزم عدم الشيء. فعدم معرفة العرب المعاصرين بحدود لغتهم وأعماقها، لا يلزم عنه بوجه من الوجوه أن يبقى حكم الناس أسيرًا لهذا الواقع الذي فرضوه عليها، ولم تفرضه هي عليهم»[١].

وما أحوجنا اليوم ــ في عصر نسعى فيه إلى مواكبة التكنولوجيا ــ إلى تضافر الجهود، وشحذ الهمم في سبيل العناية بلغتنا العربية، عناية أسلافنا، وأن نحتفي بها مثل حفاوة السابقين الأولين من العرب والمسلمين، حين كانت لغتهم تعيش أيام مشاعرهم وضمائرهم، خاصة وأن ما نقدمه من الموسوعة الرياضية يشير إلى مدى ما يمكن أن تصل إليه الجهود التي نأمل لها الاستمرار والتكاتف والتنسيق.

---

(١) التعريب ضرورة في الجامعات العربية، عبد الوهاب محمد عامر. مجلة اتحاد الجامعات العربية، العدد التاسع، آذار ١٩٧٦م.

كما وأن عملية التعريب الفني ونقل المعلومات والثقافات لم تكن وليدة يومها، وإنما هي أمر قام به العرب ونهضوا به منذ القدم، فقد تمكَّن القدماء في عصور الحضارة الإسلامية من صياغة علوم وثقافات لم تكن تخطر على بال أي عربي من قبل، فطوَّعوا هذه العلوم والثقافات، كما طوَّعوا اللغة العربية لتعبر عن أدق المعاني، فأخذوا ونقلوا ثقافات وفلسفات عن اليونانية والفارسية منذ ظهور الإسلام.

فاستطاع العرب بلغتهم الأصيلة أن يتذوقوا فلسفة أرسطو، كما تمتعوا بما في حوزة بطليموس من بحث وعلم[1]. وكانت اللغة العربية أداة علمائنا العظام في الكتابة والتعبير في الفيزياء والفلك والرياضة.

وتراثنا العلمي القديم ـ ما نقل منه إلى العربية وما نقل منها إلى غيرها من اللغات ـ يفتح لنا آفاقاً لا يحدّها بصر، ومساحات لا يصل إلى نهايتها عقل، وإن في تجارب أسلافنا خير منارات تهدينا إلى سواء السبيل.. والله الموفق.

مستشار موسوعة الكويت العلمية

د. عدنان السيد هاشم العقيل

---

(١) دور التراث العربي في تعريب التعليم الجامعي، حميد عبيد الكبيسي. دراسات عربية وإسلامية، القاهرة ١٩٨٢م.

مقدمة موسوعة الرياضيات

لا شك في أن النهضة العلمية هي إحدى مقومات حضارة أية أمة من الأمم، ويكتمل بناء هذه النهضة ببناء لغة علمية تكون أداة طيّعة يتم من خلالها نشر هذه النهضة على أوسع نطاق والارتقاء بها إلى أعلى مستوى. ولقد كان علم الرياضيات، وما زال، أحد الأسس المتينة التي تُبنى عليها كافة الفروع العلمية التطبيقية منها والنظرية. ولا بد أن نذكر هنا بكل الفخر والاعتزاز التراث العربي والإسلامي واللغة العلمية العربية التي واكبته، واللذين كان لهما كبير الأثر في الحضارة الإنسانية حتى يومنا هذا.

وإيماناً منا في المساهمة لإعادة بناء تلك الحضارة العربية، فقد طرحنا مشروع الموسوعة الرياضية الذي لاقى تجاوباً كبيرًا من مؤسسة الكويت للتقدم العلمي التي أخذت على عاتقها تمويل هذا المشروع مع عدد من المشاريع الهامة سعيًا منها إلى إرساء قواعد نهضة علمية عربية حقيقية.

ولا يسعنا إلا أن نتقدم بالشكر والامتنان إلى «مؤسسة الكويت للتقدم العلمي» ممثّلة بمديرها العام السيد الدكتور عدنان العقيل الذي لم يبخل أبداً بتقديم المشورة والخبرة من أجل صدور هذا العمل في أفضل صورة، كما نشكر له تعاونه الدائم معنا إلى أقصى الحدود.

كما نشكر هنا السيد الدكتور مصطفى محمود حلمي، مشرف إدارة التأليف والترجمة، لجهوده المبذولة من أجل تخطي العقبات في ظهور هذا العمل إلى النور.

كذلك نتوجه بالشكر إلى جميع المختصين اللغويين الذين تمت استشارتهم من أجل وضع أو نحت المصطلحات العلمية، ونخص بالذكر الدكتور عبد الله الدنان، الذي ساهم في إدخال عدد من المصطلحات العربية وفي تطويع اللغة العربية لتساير الاشتقاقات اللغوية العلمية.

كذلك فإننا نشكر كل من ساهم في إبداء الملاحظات القيمة حول هذه الموسوعة، ونخص بالذكر الدكتور أحمد سليم سعيدان، الحاصل على جائزة مؤسسة الكويت للتقدم العلمي في تاريخ الرياضيات عند العرب والمسلمين.

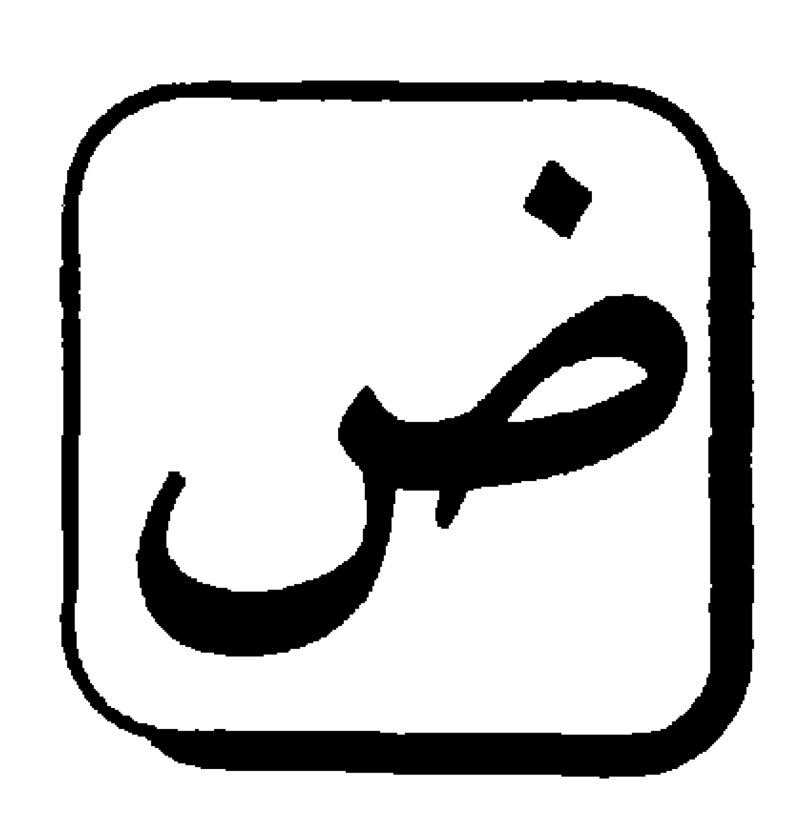
كما نتوجه بالشكر إلى الأستاذ منير البعلبكي، الحاصل على جائزة مؤسسة الكويت للتقدم العلمي عن موسوعة المورد، والذي أبدى عدداً من الملاحظات القيمة، كما أننا نعتز بمباركته للأسلوب والمنهجية التي اتبعناها في إنجاز هذه الموسوعة.

كما نشكر الآنسة انشراح عوض والآنسة إيمان القدسي، من أجل تعاونهما الكامل معنا في أعمال السكرتارية المتعلقة بالموسوعة والتي تتطلب دأباً ومثابرة.

ولا يسعنا أيضًا إلاّ أن نتقدم بالشكر إلى جميع الجنود المجهولين الذين قاموا بطباعة هذه الموسوعة بكل دقة وأمانة. والتي نتناول في نصوصها شرحًا مفصلاً ومختصرًا في ترتيب هجائي، لأهم المصطلحات الرياضية.

وأخيراً، إذ ندفع هذا العمل إلى القراء فإننا لا ندَّعي الكمال، ولكننا سعينا إلى ذلك في محاولة جادة مضنية. ولذا، فإننا نفتح صدورنا رحبة لجميع الملاحظات والتوجيهات والانتقادات التي تساعدنا في وضع هذه الموسوعة بالصورة الأفضل، آملين أن نساهم بدورنا في إغناء المكتبة العربية العلمية.

والله الموفق.



ضارب MULTIPLIER

● **الضارب:**

هو العدد الذي نضرب به عدداً آخر ونسمي العدد الآخر مضروباً.

● **طريقة الضوارب للاغرانج:**

انظر لاغرانج.

ضرب MULTIPLICATION

● **خاصية الضرب في الواحد والصفر:**

إذا كان لدينا حقلٌ ما k كحقل الأعداد العقدية مثلاً، فإن $a.1 = 1.a = a$ من أجل أي عدد a ينتمي إلى k كما أن $a.0 = 0.a = 0$ والأهم من ذلك، أنه إذا كان $ab = 0$ فإن a أو b أو كليهما يساوي صفراً. وهذه الخاصية الأخيرة لا تصح من أجل بعض الحلقات كحلقة المصفوفات إذ لو كان جداء مصفوفتين يساوي المصفوفة الصفرية فليس بالضرورة أن تكون إحدى المصفوفتين على الأقل صفراً.

مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

انظر تطابق، مجال، حلقة.

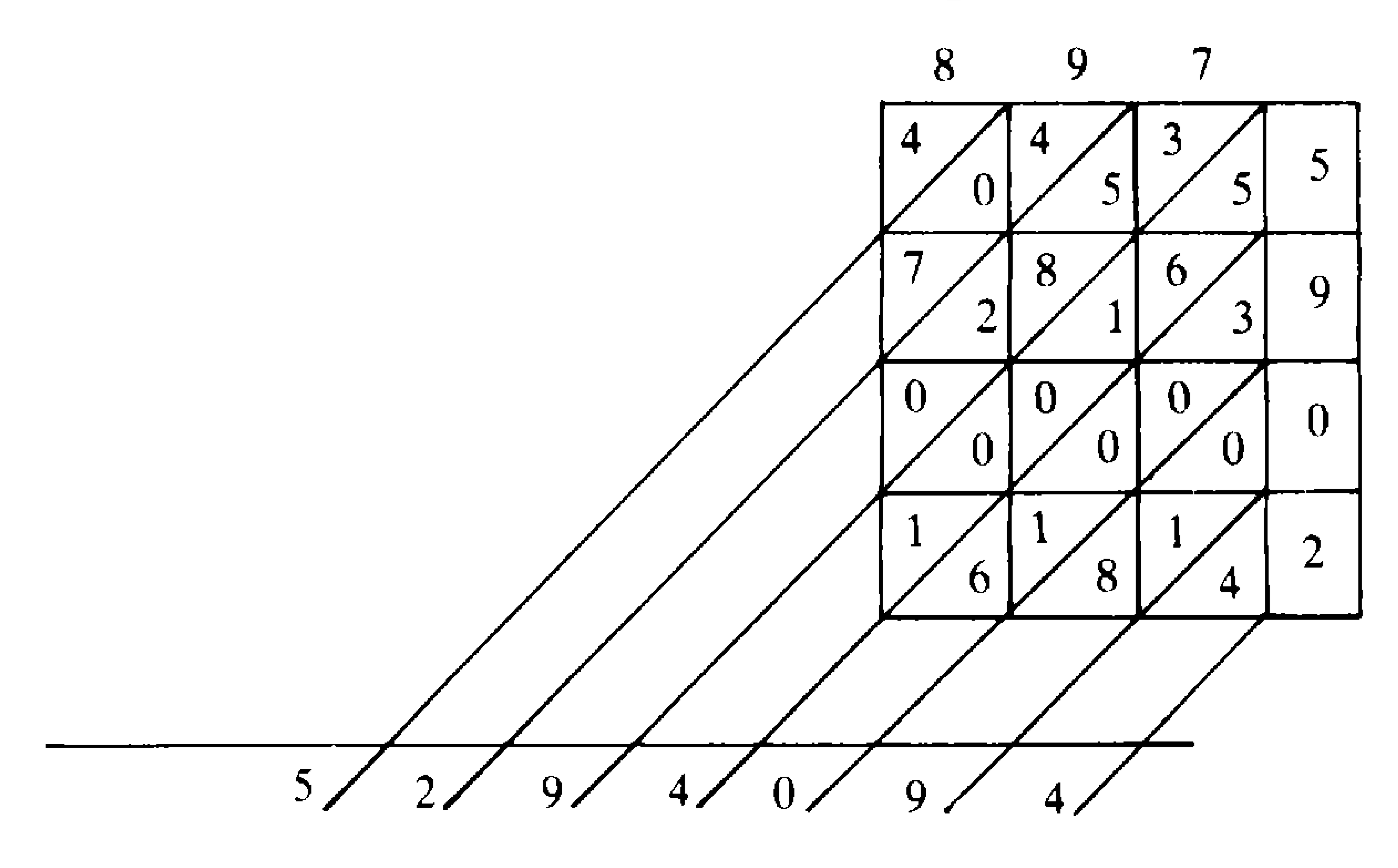
● **ضرب جذور معادلة:**

لتكن لدينا المعادلة $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ إذا أجرينا التحويل $x = \frac{y}{k}$ نحصل على معادلة جديدة في y تكون جذورها مساوية لجذور المعادلة الأصلية مضروبة في k.

● **الضرب العربي:**

وهو طريقة في الضرب اخترعها العلماء العرب من أجل ضرب عددين.

فلضرب العددين 897 و 5902 مثلاً فإننا نرتب أرقام هذه الأعداد على حرفي مستطيل ونضرب الأرقام ببعضها ونضع حاصل ضرب كل رقمين في مربع ثم نجمع الأرقام الموجودة في المربعات بشكل مائل. ويوضح الشكل الطريقة بصورة أفضل:



● **ضرب كثير الحدود:**

انظر **توزيعي**,

● **ضرب المتجهات:**

(1) الضرب بعدد: إن ضرب المتجه v بالعدد α يعني ضرب كل مركبة من مركبات المتجه بالعدد α. ونكتب:

$$\alpha \overline{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$$

حيث $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

(2) ضرب سلمي لمتجهين (جداء سلمي لمتجهين): ليكن لدينا المتجهان $\vec{a} = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ $\vec{b} = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$ فإن حاصل الضرب السلمي للمتجهين b,a الذي نرمز له بـ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ أو بـ $<a,b>$ يعرف بالعلاقة:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = <a,b> = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$

ويسمى الضرب السلمي أيضاً **جداء داخلياً وجداء نقطياً**. وتجدر الإشارة هنا إلى أن الضرب السلمي لمتجهين في فضاء ثلاثي يأخذ شكلاً بسيطاً هو:

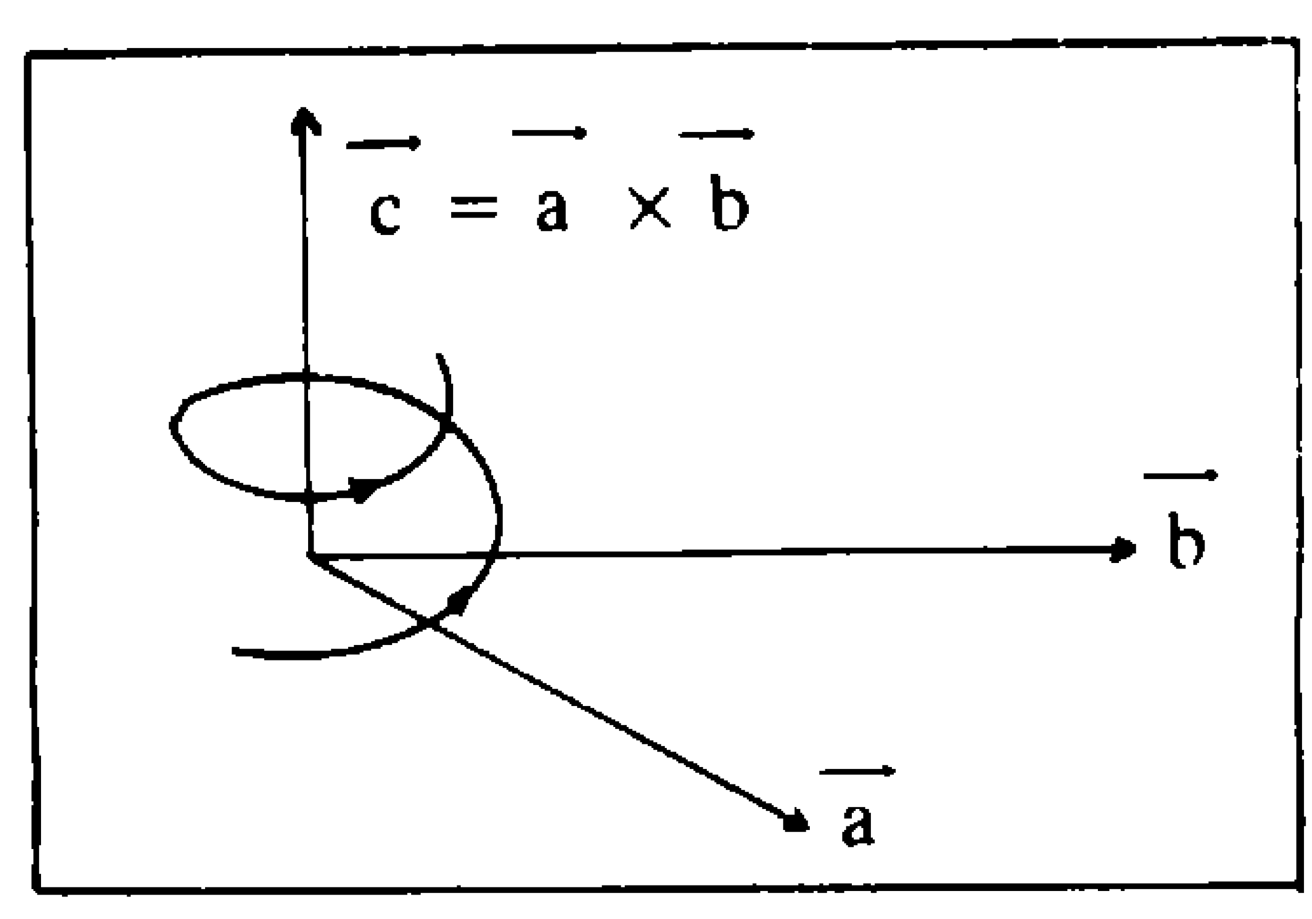
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

حيث $|\vec{b}|, |\vec{a}|$ هما طولا المتجهين $\vec{b}$ $\vec{a}$ بينما θ هي الزاوية بين المتجهين.

انظر متجه، جداء.

ويتضح من التعريف أن $\vec{a} \cdot \vec{b}$ هو كمية عددية كما أن $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

(3) ضرب متجهي لمتجهين: حاصل الضرب المتجهي لمتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ والذي نرمز له بـ $\vec{a} \times \vec{b}$ هو متجه ثالث $\vec{c}$ طوله يساوي $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$ ، حيث $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ هما طولا المتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ بينما θ هي الزاوية بينهما، وبحيث يكون $\vec{c}$ متعامداً مع المستوى الذي يشكله المتجهان $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ وموجهاً بحيث تكون المتجهات $\vec{c}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ موجهة إيجاباً، أي أن $\vec{c}$ موجه باتجاه حركة البزال (البرغي، اللولب) عند الانتقال من a إلى b.



ويسمى الضرب المتجهي أيضاً **جداء متصالباً أو جداء خارجياً** ونكتب عادة $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ حيث يتضح أن حاصل الضرب المتجهي هو متجه أيضاً. ويعطى حاصل الضرب المتجهي لمتجهين $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ بالمعين:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

حيث $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ هي متجهات الوحدة على المحاور الاحداثية المتعامدة. ويحقق الضرب المتجهي الخواص التالية:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\alpha\, \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha\, (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\, \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad k \times \vec{i} = \vec{j}$$

- **ضرب مختلط:**

انظر **مختلط**.

- **ضرب المتسلسلات:**

انظر **متسلسلة ـ** ضرب المتسلسلات اللانهائية.

- **ضرب مختصر:**

مثال: لضرب 7.1624 في 235 فإننا نكتب 235 بشكل آخر ونضرب كما يلي:

$$235 \times 7.1624 = 5 \times 7.1624 + 30 \times 7.1624 + 200 \times 7.1624$$

- **ضرب المصفوفات:**

انظر **مصفوفة**.

- **ضرب معين بعدد:**

يعني ضرب كل عنصر من عناصر سطر واحد أو عمود واحد من هذا المعين بذلك العدد.

مثال:

$$\alpha \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha x & \alpha y \\ z & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha x & y \\ \alpha z & u \end{vmatrix}$$

● ضرب المعينات:

نتائج ضرب معينين يساوي جداء قيمة المعين الأول في الثاني. ولكن المهم هنا هو ضرب معينين دون معرفة قيمها. وهكذا فإن حاصل ضرب المعينين:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} , \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

هو معين ثالث C تعرف عناصره بالعلاقة $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. وهذا يتشابه مع جداء المصفوفات.

انظر مصفوفة.

مثال:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ z & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + bz & ay + bu \\ cx + dz & cy + du \end{vmatrix}$$

ضربي — MULTIPLICATIVE

● معاكس ضربي:

انظر معاكس ـ معكوس عنصر.

ضعف الزاوية — DOUBLE ANGLE

● صيغ ضعف الزاوية:

انظر علم المثلثات ـ صيغ ضعف الزاوية.

● **التراص الضعيف:**

هو تراص بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة. وتكون المجموعة S (في الفضاء الخطي المعير N) متراصة بضعف إذا وفقط إذا كان لكل متتالية من عناصر S متتالية جزئية تقترب بضعف لنقطة في S. ويتمتع فضاء بناخ بالخاصية التالية: تكون كل مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة.

● **متراصة بضعف:**

إذا وفقط إذا كان الفضاء انعكاسياً.

● **التمام الضعيف:**

هو تمام بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة. (انظر تام ــ الفضاء التام). وكل فضاء خطي معير وتام بضعف يكون تاماً (وبالتالي يكون فضاء بناخ). كما أن كل فضاء بناخ انعكاسي يكون تاماً بضعف ولكن ليس كل فضاء بناخ وتام بضعف يكون انعكاسياً. فمثلاً فضاء ℓ^1 (المكون من جميع المتتاليات $x = (x_1, x_2, \ldots)$ بحيث يكون $\|x\| = \Sigma\,|x_i|$ منتهياً) هو فضاء تام بضعف ولكنه غير انعكاسي.

● **التقارب الضعيف:**

نقول إن متتالية العناصر $\{x_1, x_2, \ldots\}$ من الفضاء الطوبولوجي الخطي N متقاربة بضعف إذا كان $\text{Lim}\; f(x_n)$ موجودا لكل دالي خطي مستمر f معرف على N.

وإذا كان $\text{Lim}\; f(x_n) = f(x)$ لكل f فإن المتتالية $\{x_1, x_2, \ldots\}$ تتقارب بضعف للنقطة x وتسمى x النهاية الضعيفة للمتتالية.

وإذا كانت $\{f_1, f_2, \ldots\}$ متتالية من الدوال الخطية المستمرة لكل $x \epsilon N$ فإننا نقول إن f هي النهاية الضعيفة (*) للمتتالية $\{f_i\}$.

● **القانون الضعيف للأعداد الكبيرة:**

انظر كبير ــ قانون الأعداد الكبيرة.

● **الطوبولوجيا الضعيفة:**

وهي طوبولوجيا على الفضاء الطوبولوجي الخطي N مولد بواسطة مجموعة من الجوارات المعرفة كالتالي:

لكل عدد موجب ϵ و $x_0 \epsilon N$ ومجموعة منتهية $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ من الدوال المستمرة والخطية المعرفة على N فإننا نعرف الجوار U للنقطة x_0 بأنه جميع النقاط $x \epsilon N$ بحيث $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \epsilon$ لكل $k = 1,2,\ldots,n$. وتعرف المجموعات المفتوحة في هذه الطوبولوجيا على أنها اتحاد أي عدد من هذه الجوارات.

ويكون الفضاء الخطي فضاء هاوسدورف إذا وفقط إذا لكل x و y بحيث $x \neq y$ يوجد دالي خطي ومستمر f بحيث $f(x) \neq f(y)$. وهذا الشرط متحقق بشكل آلي لكل الفضاءات الخطية المعيرة.

أما الطوبولوجيا الضعيفة (*) على الفضاء المرافق الأول n^* للفضاء الطوبولوجي الخطي N فتولده مجموعة من الجوارات المعرفة كالتالي:

لكل عدد موجب ϵ و $f_0 \epsilon N^*$ ومجموعة منتهية $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ من عناصر N فإننا نعرف الجوار V للدالي f_0 بأنه جميع الدوال f بحيث $|f(x_k) - f_0(x_k)| < \epsilon$ لكل $k = 1,2,\ldots,n$. وإذا كان N فضاء خطياً معيراً، فإن كرة الواحد في N^* $(\{f \epsilon N^* | \|f\| \leq 1\})$ تكون متراصة في الطوبولوجيا الضعيفة (*).

PRESSURE **ضغط**

● **الضغط:**

هو القوة في واحدة المساحة المطبقةعلى سطح.

● **ضغط السائل:**

هو القوة التي يشكلها سائل ما في واحدة المساحة. أما ضغط السائل الواقع على واحدة مساحة أفقية فتساوي hk حيث h هو ارتفاع السائل و k كثافته.

ضلع SIDE

● **ضلع الزاوية:**

انظر زاوية.

● **ضلع مقابل لزاوية (في المثلث أو المضلع):**

المضلع الذي يفصله عن رأس الزاوية نفس العدد من الأضلاع بالنسبة لأي اتجاه تعد فيه الأضلاع حول المثلث أو المضلع.

● **ضلع المضلع:**

هو أي قطعة من القطع المستقيمة التي يتكون منها المضلع.

ضم JOIN

انظر شبكية، اتحاد ـ اتحاد مجموعات.

● **ضم غير قابل للاختزال:**

يعرف عنصر الضم غير القابل للاختزال في حلقة مجموعات أو شبكية بأنه العنصر w بحيث إذا كان هناك عنصران X و Y وكان $X \cup Y = w$ فإنه إما أن يكون $X = w$ أو $Y = w$.

ويكون العنصر في الجبر البولي عنصر ضم غير قابل للاختزال إذا وفقط إذا كان العنصر مساوياً الذرة أو الصفر.

كما يكون كل عنصر في شبكية منتهية ضمًا لعناصر ضم غير قابل للاختزال.

ويعرف التلاقي غير القابل للاختزال بنفس الطريقة وذلك باستبدال التقاطع $\cap$ بالاتحاد $\cup$.

ضمني IMPLICIT

● **المفاضلة الضمنية:**

انظر مفاضلة ـ المفاضلة الضمنية.

● **الدالة الضمنية:**

هي دالة معرفة بالصيغة $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ وفي حالة متغيرين y,x فتكتب **الدالة الضمنية** على الشكل $f(x,y) = 0$. وإذا اعتبرنا y متغيراً تابعاً فإنه يقال إن $f(x,y) = 0$ تعرف y كدالة ضمنية في x. وأحياناً نستطيع أن نحول المعادلة $f(x,y) = 0$ إلى الصيغة $y = F(x)$ وفي هذه الحالة تكون y دالة صريحة في x.

مثال (1): في المعادلة $x + y^3 + 2x^2y = 0$ تكون y دالة ضمنية في x.

مثال (2): أما في المعادلة $y = x^2 + 1$ فإن y دالة صريحة في x.

مثال (3): وتعرف المساواة $x^2 + y^2 = 4$ علاقة بين x و y. وبحل هذه المعادلة نحصل على الدالتين $y = +\sqrt{4 - x^2}$ و $y = -\sqrt{4 - x^2}$ حيث تكون y في كل منهما دالة صريحة في x.

● **مبرهنة الدالة الضمنية:**

هي مبرهنة تنص على الشروط الكافية لمعادلة أو جملة من المعادلات كي تكون قابلة للحل بدلالة متغيرات مستقلة معينة. وفي حالة دالة بمتغيرين $F(x,y)$ فتنص مبرهنة الدالة الضمنية على أنه إذا كان F والمشتق الجزئي D_yF للدالة F بالنسبة للمتغير y مستمرين في جوار النقطة (x_0,y_0) وكان $F(x_0,y_0) = 0$ و $D_yF(x_0,y_0) \neq 0$ فإنه يوجد $\epsilon>0$ بحيث يكون هناك دالة وحيدة f تحقق $y_0 = f(x_0)$ وتكون مستمرة وتحقق $F(x,f(x)) = 0$ لكل النقاط x في $|x - x_0| < \epsilon$.

مثال: لنعتبر الدالة $F(x,y) = x^2 + xy^2 + y - 1$

$$D_yF(x,y) = 2xy + 1$$

نلاحظ أن كلاً من F و D_yF مستمرة في جوار النقطة $(1,0)$ وأن $F(1,0) = 0$ و $D_yF(1,0) \neq 0$. ولذا فحسب المبرهنة يوجد حل وحيد $y = f(x)$ في جوار النقطة $(1,0)$ بحيث يكون $f(1) = 0$ وهذا الحل، هو:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4x\,(x^2 - 1)}}{2x}$$

● **المبرهنة العامة للدالة الضمنية:**

لنعتبر n من المعادلات في $n + p$ من المتغيرات:

$$x_1, x_2, \ldots, x_p, \quad u_1, u_2, \ldots, u_n$$

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0 \qquad (*)$$

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_p; u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

ولنفرض أن القيم $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, x_p = x_p^0, u_1 = u_1^0, u_2 = u_2^0, \ldots, u_n^0$ تحقق هذه المعادلات (*) وأن الدوال f_i مستمرة في جوار $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0; u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$ وأن المشتقات الجزئية الأولى لهذه الدوال مستمرة في هذا الجوار وأن يعقوبية هذه الدوال لا تنعدم عند هذه القيم. ففي ظل هذه الشروط يوجد مجموعة وحيدة من الدوال المستمرة:

$$u_1 = \phi_1 (x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

$$u_2 = \phi_2 (x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

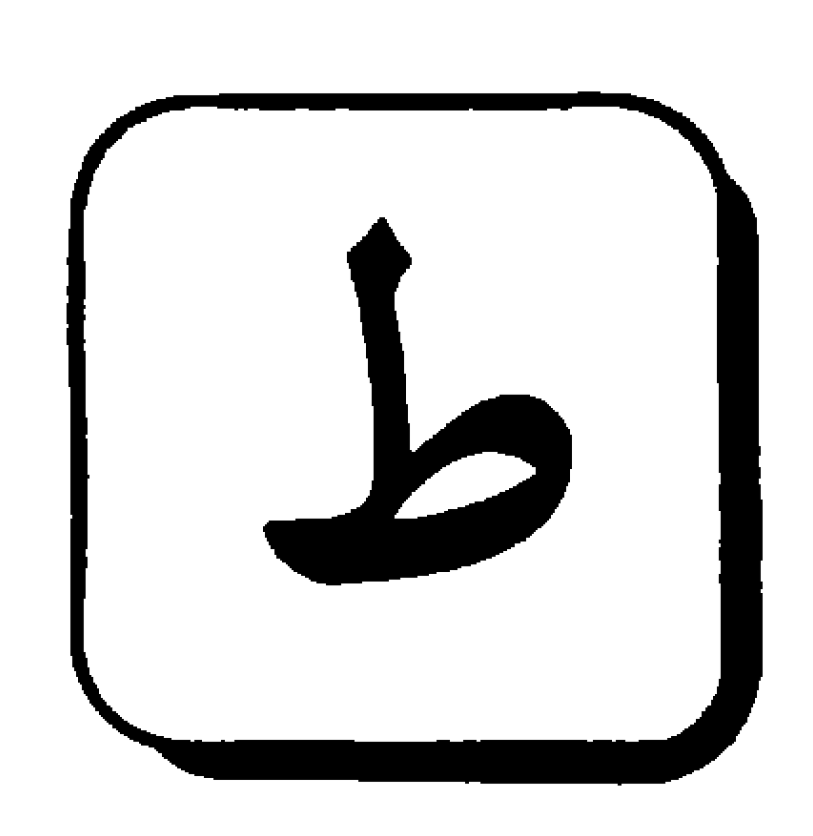
$$u_n = \phi_n (x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

معرفة في جوار للنقطة $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)$ بحيث تحقق هذه الدوال المعادلات (*) وبحيث يكون $\phi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0) = u_i$ لقيم $i = 1,2,\ldots,n$.

ضوء LIGHT

● **سنة ضوئية:**

هي المسافة التي يقطعها الضوء في سنة (شمسية) وتساوي هذه المسافة تقريباً $5.80.10^{12}$ ميلاً أو $9.461.10^{12}$ كيلومتراً.



طائفة CATEGORY

تتألف الطائفة من صنيفين O_k و M_K وتسمى عناصر O_K **كائنات** وعناصر M_K **تقارنات** بحيث تتحقق الشروط التالية:

(i) لكل زوج مرتب (a,b) من الكائنات هناك مجموعة $M_K(a,b)$ من التقارنات بحيث ينتمي كل عنصر من عناصر M_K إلى مجموعة واحدة من هذه المجموعات.

(ii) إذا كان f في $M_k(a,b)$ وكان g في $M_k(b,c)$ فإن مركبهما أو حاصل ضربهما gof يكون معرفاً بشكل وحيد وينتمي إلى $M(a,c)$.

(iii) إذا كانت f,g,h عناصر في $M_K(a,b)$, $M_K(b,c)$, $M_k(c,d)$ على الترتيب بحيث يكون كل من (hog)of, ho(gof) معرفاً فإنه يكون (hog)of = ho(gof).

(iv) لكل كائن a يوجد تقارن e_a في $M_K(a,a)$ ويسمى **تقارناً محايداً** بحيث يكون $foe_a = f$، $e_aog = g$ إذا كان هناك كائنات b,c وكان f في $M_K(b,a)$ وكان g في $M_K(a,c)$ يعطى مفهوم الطائفة نموذجاً مجرداً عاماً لحالات كثيرة ندرس فيها مجموعات معينة وبنى معرفة عليها ونركز على ذلك الصنف من التطبيقات الذي يحفظ هذه البنى.

أمثلة:

(i) لتكن O_K عائلة المجموعات الجزئية لمجموعة T ولتكن $M_K(a,b)$ مجموعة الدوال التي تتخذ من a مجالاً لها ويكون مداها داخل المجموعة b.

(ii) لتكن O_K مجموعة زمر و $M_K(a,b)$ مجموعة التشاكلات من الزمرة a إلى الزمرة b.

(iii) لتكن O_K مجموعة الفضاءات الطوبولوجية و $M_K(a,b)$ مجموعة الدوال المستمرة من a إلى b. **الصفر في الطائفة** هو كائن 0 بحيث يحتوي كل من $M_K(a,0)$ و $M_K(0,a)$ على تقارن واحد فقط وذلك لأي كائن a. إذا احتوت طائفة ما على صفر فإن التقارن الصفر في $M_K(a,b)$ هو $g_{ob}of_{ao}$ حيث أن f_{ao},g_{ob} هما العنصران الوحيدان في $M_K(a,o),M_K(o,b)$ على الترتيب. **التماثل أو التكافؤ** في $M_K(a,b)$ هو تقارن f في $M_K(a,b)$ وله الخاصة أن هناك تقارن g في $M_K(b,a)$ بحيث يكون fog,gof تقارنات محايدة $M_K(b,b),M_K(a,a)$ على الترتيب. إذا كان التماثل في $M_K(a,a)$ فإننا نسميه **تماثلاً ذاتياً**، أما التقارن الواقع في $M_K(a,a)$ فإننا نسميه **تشاكلاً داخلياً**. انظر دلّال.

● **مبرهنة الطائفة لباير:**

هي المبرهنة التي تقول بأن كل فضاء مقاسي تام يجب أن يكون من الطائفة الثانية، أو أن تقاطع أي متتالية من المجموعات المفتوحة الكثيفة في فضاء مقاسي تام يكون هذا التقاطع كثيفاً.

مثلاً: لنأخذ C فضاء الدوال المستمرة على الفترة المغلقة [0,1]، إذا عرفنا المسافة d على C كما يلي:

$$d(f,g) = \sup |f(x) - g(x)|$$

فإننا نحصل على فضاء مقاسي تام. لو أخذنا مجموعة عناصر C التي هي قابلة للمفاضلة عند نقطة أو أكثر في [0,1] لحصلنا على مجموعة من الطائفة الأولى في C، وبذلك تكون مجموعة الدوال غير القابلة للمفاضلة عند أي من نقاط [0,1] هي من الطائفة الثانية.

● **مبرهنة الطائفة لبناخ:**

هي المبرهنة التي تقول إنه إذا كانت S مجموعة في فضاء طوبولوجي T (من النمط T_1) وكانت من الطائفة الثانية في T فإنه يوجد مجموعة غير خالية U

في T بحيث تكون S من الطائفة الثانية عند كل نقطة من نقاط U. ينتج عن ذلك أن المجموعة الجزئية في T تكون من الطائفة الأولى في T إذا كانت من الطائفة الأولى عند كل واحدة من نقاط T.

● **طائفة مجموعات:**

نقول إن المجموعة S هي من **الطائفة الأولى في مجموعة** T إذا كان بالامكان تمثيلها كاتحاد قابل للعد لمجموعات تكون كل واحدة منها كثيفة في مكان في T. كل مجموعة ليست من الطائفة الأولى تكون من **الطائفة الثانية**. نقول إن المجموعة S **من الطائفة الأولى عند نقطة** x إذا كان هناك جوار U للنقطة x بحيث يكون $S \cap U$ من الطائفة الأولى. إذا كانت S مجموعة من الطائفة الأولى فإن متممة S تسمى **مجموعة راسبية** أحيـاناً تعرّف المجموعات الراسبية على أنها متممات المجموعات من الطائفة الأولى في T بحيث تكون كل مجموعة جزئية مفتوحة غير خالية في T من الطائفة الثانية. إذا كانت S مجموعة جزئية على الخط الحقيقي فإن S تكون من الطائفة الأولى إذا وفقط إذا كان هناك تحويل واحد لواحد من الخط إلى نفسه بحيث تقابل S مجموعة قياسها صفر وتكون هذه المجموعة F_σ أيضاً.

انظر بوريل ـ مجموعة بوريل.

طارة — TORUS

نفس حلقة المرساة.

طاقة — ENERGY

● **الطاقة:**

هي القدرة على عمل شغل ما.

● **تكامل الطاقة:**

(1) هو تكامل ينشأ من حل المعادلة التفاضلية للحركة $\frac{d^2s}{dt^2} = \pm k^2 s$

والتي تصف حركة توافقية بسيطة. **وتكامل الطاقة** يساوي $\frac{v^2}{2}=\pm k^2\int s ds$ وهو يسمى كذلك لأنه يساوي **طاقة الحركة** $\frac{1}{2}mv^2$ عند ضربه بمقدار الكتلة m.

(2) والمعنى الآخر **لتكامل الطاقة** هو أي تكامل يعبر عن المقولة القائلة بأن مجموع طاقتي الحركة والكمون يكون ثابتاً في أي نظام ديناميكي يحافظ على الطاقة.

- **حفظ الطاقة**:

هو مبدأ ينص على أن الطاقة لا تفنى ولا يمكن خلقها. وفي علم الديناميك ينص هذا المبدأ على أن مجموع **طاقتي الحركة والكمون** ثابت في مجال قوة محافظة.

- **طاقة الحركة**:

هي الطاقة التي يمتلكها الجسم بفعل حركته. وإذا تحرك جسم كتلته m بسرعة v فإن طاقة حركته تساوي $\frac{1}{2}mv^2$ وفي مجال قوة محافظ فإن الشغل المبذول لازاحة جسم من مكان لآخر يساوي التغير في طاقة الحركة. وإذا دار جسم حول محور بسرعة زاوية ω وبعزم عطالة ذاتية I حول المحور فإن طاقة حركته تساوي $\frac{1}{2}I\omega^2$.

- **طاقة الكمون**:

هي الطاقة التي يمتلكها الجسم بفعل موضعه.

وفي مجال قوة محافظ تعرف طاقة الكمون بأنها الشغل المبذول لازاحة جسم من مكانه الأصلي إلى أي مكان آخر ولكن بالاشارة السالبة.

انظر **طاقة ــ حفظ الطاقة**.

- **مبدأ الطاقة**:

هو مبدأ في علم الميكانيك ينص على أن الزيادة في طاقة الكمون تساوي الشغل المبذول مضروبًا بالقوة.

طبقات (إحصاء) **STRATA**

انظر **عشوائي ــ عينة عشوائية مطبّقة**.

طبيعي NATURAL

● **الأعداد الطبيعية:**

هي بالتعريف الأعداد ...,1,2,3,4 وهي تتطابق مع الأعداد الصحيحة الموجبة.

انظر صحيح.

● **لوغاريتمات طبيعية:**

هي اللوغاريتمات التي تعتمد الأساس (+2.71828183) وتسمى هذه اللوغاريتمات عادة **اللوغاريتمات النيبرية أو النابيرية**.

انظر لوغاريتم.

● **معادلات طبيعية لمنحن فضائي:**

انظر أصيل ـ معادلات أصيلة لمنحن فضائي.

طبيعي اللوغاريتم LOGNORMAL

● **توزيع طبيعي اللوغاريتم:**

نقول بأن للمتغير العشوائي X توزيعاً طبيعي اللوغاريتم إذا كان lnX هو متغيراً عشوائياً طبيعياً أي إذا كان يوجد متغير عشوائي طبيعي Y بحيث يكون $X = e^Y$، ونسمي X أحياناً **المتغير العشوائي طبيعي اللوغاريتم**.

إذا كان يوجد للمتغير Y **وسط** μ **وتباين** σ^2 فإن **دالة الكثافة الاحتمالية** f للمتغير X تحقق العلاقة $f(x)=0$ إذا كان $x \leqq 0$ و

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x - \mu)^2/\sigma^2}$$

من أجل $x > 0$.

ويكون الوسط هنا هو $e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$. أما التباين فهو $(e^{\sigma^2} - 1)(e^{2\mu+\sigma^2})$.

● **الفضاء الطوبولوجي الخطي:**

انظر متجه ــ فضاء المتجهات.

● **الزمرة الطوبولوجية:**

هي زمرة $(G,\bullet)$ معرف عليها طوبولوجيا معينة بحيث يتحقق الشرطان التاليان:

(1) تكون عملية الزمرة مستمرة أي أن $\bullet: G\times G \to G$ المعرفة بالقانون $(x,y) \to x\bullet y$ دالة مستمرة.

(2) تكون عملية التعاكس في الزمرة مستمرة أي أن $x \to x^{-1}$ المعرفة من G إلى G.

وهذان الشرطان يكافئان الشرطين التاليين:

(1)' إذا كان W جواراً لـ $x\bullet y$ فإنه يوجد جوار U لـ x و V لـ y بحيث إذا كان $u\epsilon U$ و $v\epsilon V$ فإن $u\bullet v\epsilon W$.

(2)' إذا كان V جواراً لـ x^{-1} فإنه يوجد جوار U للعنصر x بحيث $u^{-1}\epsilon V$ إذا كان $u\epsilon U$.

مثال (1): بالامكان دائمًا تحويل أية زمرة إلى زمرة طوبولوجية إذا عرفنا عليها الطوبولوجيا المتقطعة.

انظر **طوبولوجيا** ــ طوبولوجيا متقطعة.

مثال (2): لنعتبر زمرة الأعداد الحقيقية R مع عملية الجمع. إذا عرفنا الطوبولوجيا المقاسية الاعتيادية على R $(d(x,y) = |x - y|)$ فإن R تصبح زمرة طوبولوجية.

مثال (3): لنعتبر زمرة المصفوفات اللامنفردة $G = GL(n,R)$ من مرتبة n مع عملية ضرب المصفوفات. وباعتبار مجموعة المصفوفات $m = m(n,R)$ من مرتبة n فضاء إقليدياً بعديته n^2 (أي R^{n^2}).

فإن G تصبح فضاء جزئياً معـرفـاً عليها الفضاء الطوبولوجي المولد من طوبولجيا m. وبهذه الطوبولوجيا تصبح G **زمرة طوبولوجية** تسمى عادة **بالزمرة الخطية العامة**.

- **المنطوى الطوبولوجي:**
  انظر **منطو**.
- **الخاصية الطوبولوجية:**

هي أية خاصية لشكل هندسي A والتي يتمتع بها أي شكل آخر ناتج من تحويل A بواسطة تحويل طوبولوجي يؤثر على A. ومن الخواص الطوبولوجية نذكر **الاتصال والتراص**، وكون المجموعات **مفتوحة** أو **مغلقة** وكون النقاط **نقاط تراكم**.

- **الفضاء الطوبولوجي:**

يسمى الزوج المرتب (X,T) بالفضاء الطوبولوجي إذاكانت X مجموعة وكانت T عائلة من المجموعات الجزئية في X وتحقق الشروط الثلاثة التالية:

(1) $\phi, X\epsilon T$

(2) اتحاد أي عنصر من T يكون عنصراً من T.

(3) تقاطع أي عدد منته من عناصر T يكون عنصراً من T وتسمى عناصر T **بالمجموعات المفتوحة**.

مثال: يكون المستوى فضاء طوبولوجياً إذا عرفنا المجموعة المفتوحة U بأنها تلك المجموعة الجزئية من المستوى بحيث لكل عنصر $x\epsilon U$ يوجد $\epsilon>0$ بحيث تحتوي U على القرص المفتوح المتمركز في x والذي نصف قطره يساوي ϵ. وبنفس الطريقة يمكن تعرف طوبولوجيا على أي فضاء مقاس ويسمى عادة بطوبولوجيا المقاس.

وهناك عدة أنواع خاصة من الفضاءات الطوبولوجية نورد بعضاً منها هنـا:

(1) فضاء T_0 (أو فضاء كلمغورف): هو فضاء طوبولوجي له الخاصية

التالية: لكل x و y حيث $x \neq y$ إما أنه توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على x ولا تحتوي على y أو أنه توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على y ولا تحتوي على x.

(2) فضاء T_1: هو فضاء طوبولوجي يتمتع بالخاصية التالية: لكل x و y حيث $x \neq y$ توجد مجموعة مفتوحة تحتوي على x ولا تحتوي على y ومجموعة مفتوحة أخرى تحتوي على y ولا تحتوي على x.

(3) فضاء T_2 (أو فضاء هاوسدورف): هو فضاء طوبولوجي يتمتع بالخاصية التالية: لكل x و y حيث $x \neq y$ توجد مجموعتان مفتوحتان منفصلتان تحتوي إحداهما على x والأخرى على y.

(4) فضاء T_3: هو فضاء طوبولوجي T_1 ونظامي.

(5) فضاء T_4: هو فضاء طوبولوجي T_1 ومعتدل.

(6) فضاء T_5: هو فضاء طوبولوجي T_1 **وكامل الاعتدال**.

(7) فضاء $T_{3/2}$ (أو فضاء تيخونوف): هو فضاء طوبولوجي T_1 **وكامل الانتظام**.

انظر نظامي ـ فضاء نظامي.

- **التحويل الطوبولوجي:**

هو تقابل ثنائي الاستمراري بين نقاط شكلين هندسيين A و B. أي أنه تقابل بين نقاط A و B بحيث تقابل المجموعات المفتوحة في A تلك الموجودة في B وبالعكس (ونفس الشيء يمكن قوله بالنسبة للمجموعات المغلقة). وفي هذه الحالة نقول أن A و B متكافئان طوبولوجياً. وكمثال على التحويل الطوبولوجي نورد **التشوه المستمر**.

انظر تشوه.

الطوبولوجيا — TOPOLOGY

هو فرع من الهندسة يعالج **الخواص الطوبولوجية** للأشكال.

- **الطوبولوجيا التوافقية:**

هو فرع من الطوبولوجيا يبحث في الأشكال الهندسية وذلك بتحليلها إلى

أبسط الأشكال الهندسية تسمى **المبسطات** والتي تقترن ببعضها بطريقة نظامية.

انظر **عقدي ــ** العقدي المبسط، وانظر كذلك سطح.

● **الطوبولوجيا الجبرية:**

وهذا النوع يحتوي على حقول الطوبولوجيا التي تستخدم الطرق الجبرية (وعلى الأخص نظرية الزمر) بشكل كبير.

انظر **شباه ــ** زمرة شباه.

● **طوبولوجيا المجموعة ــ النقطة:**

وهو الفرع الذي يعنى بدراسة المجموعات باعتبارها تراكمات من النقاط ووصف هذه المجموعات بدلالة لخواص الطوبولوجية مثل كونها مفتوحة، مغلقة، متراصة، معتدلة، نظامية، متصلة، . . . الخ.

● **طوبولوجيا الفضاء:**

هو مجموعة كل المجموعات الجزئية المفتوحة في الفضاء.

وبصورة أوضح فإن الطوبولوجيا T على المجموعة X يعرف بأنه مجموعة مكونة من المجموعات الجزئية من X وتحقق الشروط التالية:

(1) $\phi, X \in T$، حيث ϕ المجموعة الخالية.

(2) اتحاد أي عناصر من T يكون عنصراً في T.

(3) تقاطع أي عدد منته من عناصر T يكون عنصراً في T.

وفي هذه الحالة نقول ان (X,T) **فضاء طوبولوجي**.

انظر **أساس ــ** أساس للطوبولوجيا وانظر **طوبولوجي ــ** فضاء طوبولوجي.

وبالنسبة **لفضاء خطي معير**، فإننا نسمي الطوبولوجيا المعرفة بواسطة المعيار **بالطوبولوجيا القوية** لتمييزها عن **الطوبولوجيا الضعيفة**.

انظر **ضعيف ــ** طوبولوجيا ضعيفة.

مثال (1): ويمكن تعريف طوبولوجيين T_1 و T_2 على أية مجموعة حيث

يتكون T_1 من المجموعتين ϕ و X ويسمى بالطوبولوجيا **التافهة أو اللامتقطعة**. أما T_2 فيتكون من جميع المجموعات الجزئية للمجموعة X ويسمى **بالطوبولوجيا المتقطعة**.

مثال (2): لنعتبر المجموعة $X = \{1,2,3,4\}$ والمجموعة $T = \{\phi, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

نلاحظ أن T تحقق جميع شروط الطوبولوجيا على X. وبالتالي فإن (X,T) طوبولوجيا فضائياً. وتكون المجموعات $\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \phi, X$ المجموعات المفتوحة في X. وتكون متمماتها المجموعات المغلقة في X. أما المجموعة $\{3\}$ فليست مفتوحة لأنها ليست عنصراً في T وكذلك فإنها ليست مغلقة لأنها ليست متممة لعنصر في T.

● **الطوبولوجيا المنتظمة:**

انظر منتظم.

طوبولوجيا المتراص ــ المفتوح — COMPACT OPEN TOPOLOGY

ليكن X و Y فضاءين طوبولوجيين ولتكن F عائلة من الدوال المعرفة من X إلى Y. وإذا كانت K مجموعة جزئية من X و U مجموعة جزئية من Y فإن

$$W(K,U) = \{f \epsilon F \mid f(K) \subset U\}$$

وتشكل العائلة المكونة من المجموعات W(K,U) حيث K مجموعة متراصة في X و U مجموعة مفتوحة في Y ــ أساساً جزئياً لطوبولوجيا المتراص المفتوح على F. أما أساس هذه الطوبولوجيا فيتكون من المجموعات التي على الشكل:

$$\cap \{W(K_i, U_i) \mid i = 1,2,\ldots,\}$$

حيث K_i مجموعة متراصة في X و U_i مجموعة مفتوحة في Y لكل i.

ويحتوي طوبولوجيا المتراص ــ المفتوح على طوبولوجيا التقارب النقطي.

ويكون الفضاء (F,C) فضاء هاوسدورف إذا كان Y هاوسدورف كما يكون نظامياً إذا كان Y نظامياً وكانت عناصر E دوالاً مستمرة.

الطوبولوجيا الضعيفة: WEAK TOPOLOGY

لتكن X مجموعة ما ولتكن $U=\{A_\alpha:\alpha\epsilon A\}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X بحيث تمتلك كل $A\alpha$ طوبولوجيا خاصة بها.

ولنفترض أن العائلة U تحقق الخواص التالية:

(1) يتفق طوبولوجيا $A\alpha$ و A_β عند تقاطعهما $A\alpha\cap A_\beta$.

(2) اما أن يكون (أ) $A\alpha \cap A_\beta$ مجموعة مفتوحة في $A\alpha$ وفي A_β. أو (ب) $A\alpha \cap A_\beta$ مجموعة مغلقة في $A\alpha$ وفي A_β. نعرف **الطوبولوجيا الضعيفة** (المولدة من U على X) بالمجموعة {مجموعة مفتوحة في $A\alpha$ لكل $\tau(u) = \{U\subset X|U\cap A\alpha$: α

ونورد هنا بعض الملاحظات بخصوص $\tau(u)$

(أ) تحتفظ كل $A\alpha$ بالطوبولوجيا الخاصة بها إذا اعتبرناها كفضاء جزئي من $(X,\tau(u))$.

(ب) كل $A\alpha$ تكون مجموعة مغلقة في $(X,\tau(u))$. وتكون $B \subset X$ مغلقة في الفضاء $(X,\tau(u))$ إذا وفقط إذا كان تقاطعها مع كل $A\alpha$ مغلقاً في $A\alpha$.

مثال (1): تعتبر $\tau(u)$ أكبر طوبولوجيا يمكن تعريفها على X بحيث تحافظ على الطوبولوجيا المعطاة على كل $A\alpha$.

مثال (2): إذاكانت العائلة $u = \{A\alpha|\alpha\epsilon A\}$ غطاء مفتوحاً للفضاء X فإن طوبولوجيا X هي بالضبط الطوبولوجيا الضعيفة $\tau(u)$.

طبيعي NORMAL

اعتيادي أو عام أو متعارف عليه.

- **ترتيب طبيعي:**

ترتيب متعارف عليه لمجموعة من العناصر. مثلاً ...a,b,c,d, هو ترتيب

طبيعي للحروف، إذا كان a,b,c هو الترتيب الطبيعي للأحرف الثلاثة فإن c و a و b هو ترتيب تعاكسي.

انظر **تعاكس ــ تعاكس متتالية من العناصر**.

● **توزيع طبيعي:**

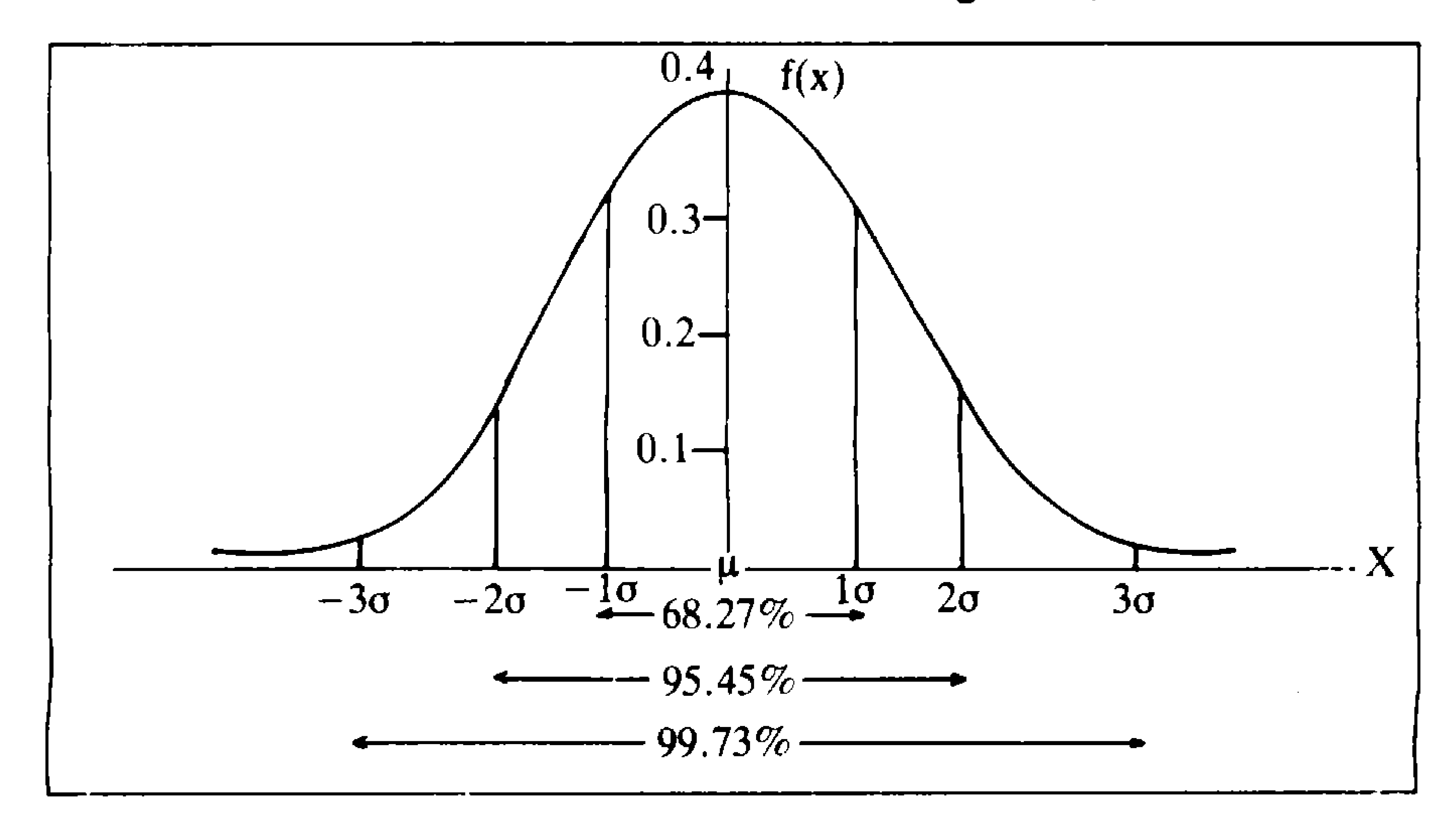
هو توزيع احتمالي لمتغير عشوائي X دالة كثافته الاحتمالية

$$f(x) = (\sqrt{2\Pi}\sigma)^{-1}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad ; -\infty < x < \infty$$

وحيث $\sigma > 0, -\infty < \mu < \infty$ ثوابت تسمى وسائط التوزيع. ويكون بيان دالة الكثافة الاحتمالية f(x) منحنى متناظراً حول μ ويكون بشكل جرسي متجه إلى الأسفل. إن وسط التوزيع (أي E(x)) هو μ وتباين التوزيع هو σ^2.

تسمى f(x) **دالة الكثافة الاحتمالية الطبيعية** أو دالة **التكرار الطبيعي**، كما يسمى منحنى f(x) **المنحنى الطبيعي أو منحنى التكرار الطبيعي أو منحنى الاحتمال الطبيعي**.

ويكون حوالي 68.27% من الاحتمال (المساحة تحت المنحنى الطبيعي) محصوراً في الفترة $x= \mu \pm \sigma$ وحوالي 95.45% من الاحتمال محصوراً في الفترة $x = \mu \pm 2\sigma$ وحوالي 99.73% من الاحتمال (أي كله تقريباً) محصوراً في الفترة $x = \mu \pm 3\sigma$. انظر الشكل.



إن الدالة المولدة للعزوم $E(e^{tx})$ للتوزيع الطبيعي هي

$$M(t) = e^{\mu t+\sigma^2 t^2/2} \qquad -\infty < t < \infty$$

إذا كان 0 = و 1 = فإن التوزيع الناتج يسمى التوزيع الطبيعي المعياري وتكون دالة كثافته الاحتمالية

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < Z < \infty$$

وإذا كان X يتبع توزيعاً طبيعياً بوسط μ وتباين σ^2 (يكتب بشكل $N(\mu,\sigma^2)$) فإن المتغير العشوائي $\frac{X-\mu}{\sigma}$ يتبع التوزيع الطبيعي المعياري. إن من المتفق عليه هو أن التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية نظراً لعدة أسباب منها:

(1) يصلح التوزيع الطبيعي كنموذج تقريبي للتوزيعات التكرارية لعدة صفات إنسانية مثل الطول والوزن والذكاء، ولعدة مقاييس وأبعاد طبيعية. كذلك يصلح لتقريب التوزيع التكراري للأخطاء الناتجة من إعادة مقاييس طبيعية مثل أبعاد الأجرام السماوية.

(2) يمكن تقريب كثير من التوزيعات الاحتمالية المعروفة مثل توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون وتوزيع مربع كاي وتوزيع t بواسطة التوزيع الطبيعي.

3) يلعب التوزيع الطبيعي دوراً مهماً في نظرية الاستدلال الاحصائي لأنه يصلح كتوزيع تقريبي (توزيع نهائي عندما يؤول حجم العينة n إلى اللانهاية) لكثير من الاحصاءات المستخدمة في التقدير أو في الاختبارات الاحصائية. وبواسطة مبرهنة النزعة المركزية (انظر مركزي: مبرهنة النزعة المركزية) فإنه يمكن تقريب توزيع وسط العينة $\bar{X}$ بواسطة التوزيع الطبيعي. ليكن $\vec{X}=x(X_1,X_2,\ldots,X_p)$ متجهاً عشوائياً بمتجه الوسط $\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_p)$ حيث $\mu_i=E(X_i)$ ومصفوفة تغاير $\Sigma=||\sigma_{ij}||$ لأجل $i,j=1,2,\ldots,p$ حيث $\sigma_{ij}=E(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)$.

نعـرّف **التوزيع الطبيعي المتعدد** (أو التوزيع الطبيعي متعدد المتغير) بدالة الكثافة الاحتمالية.

$$f(\vec{x}) = (2,\Pi)^{-p/2}|\Sigma|^{-1/2}\, e^{-(1/2(\vec{x}-\vec{\mu})\,\vec{\Sigma}(\vec{x}-\vec{\mu})}$$

وتكون الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع

$$M(\vec{t}) = M(t_1,t_2,\ldots,t_p) = e^{\vec{t}'\vec{\mu} + 1/2\vec{t}'\vec{\Sigma}\vec{t}}$$

والدالة المميزة $\phi(\vec{t}) = \phi(t_1,t_2,\ldots,t_p) = e^{i\vec{t}'\vec{\mu} - 1/2\vec{t}'\vec{\Sigma}\vec{t}}$

حيث $i = \sqrt{-1}$.

إذا كان المتجه العشوائي $\overline{X}$ يتبع تـوزيعـاً طبيعيـاً متعـدداً بمتجه وسط $\vec{\mu}$ وتغاير Σ فإن المتغير العشوائي $\overline{Y} = \vec{D}\,\vec{X}$ يتبع توزيعاً طبيعياً متعدداً بمتجه وسط $\vec{D}\vec{\mu}$ ومصفوفة تغاير $\vec{D}\vec{\Sigma}\vec{D}$ حيث $\vec{D}$ مصفوفة ثابتة.

مرادف: توزيع غاوس، انظر ذو الحدين: توزيع ذي الحدين، توزيع ثنائي: توزيع طبيعي ثنائي، وF: توزيع F و t توزيع t، وانظر **طبيعي اللوغاريتم**: توزيع طبيعي اللوغاريتم، وانظر **دقة**: مقياس الدقة.

امتداد طبيعي لحقل: . انظر **امتداد**: امتداد حقل.

- **عائلة طبيعية من دوال تحليلية**:

عائلة دوال تحليلية بمتغير عقدي في مجال مشترك D بحيث ان كل متتالية لا منتهية من هذه الدوال تحتوي على متتالية جزئية تتقارب بانتظام من دالة تحليلية (   ) في كل منطقة مغلقة في D.

- **دالة تكرار طبيعية**:

نفس دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع طبيعي.

- **شكل طبيعي لمعادلة**:

انظر خط: معادلة خط مستقيم. وانظر مستوى: معادلة مستوى.

- **معادلات طبيعية**:

انظر أصغر: طريقة أصغر المربعات.

طرح SUBTRACTION

هو عملية إيجاد كمية إذا أضيفت إلى إحدى كميتين معلومتين تعطي الكمية الأخرى. وتسمى الكيمتين المعلومتين **المطروح** و **المطروح منه** على الترتيب. أما الكمية المطلوب إيجادها فتسمى **الباقي** أو **الفرق**. ففي عملية الطرح $2 = 4 - 6$ يكون المطروح منه 6، والمطروح 4، والباقي 2 ويسمى طرح الأعداد المؤشرة (أي التي ترفق بإشارة) **بالطرح الجبري** وهذا يكافىء تغيير إشارة المطروح وجمعه إلى المطروح منه مثل: $4 - 6 = 4 + (-6) = -2$.

انظر **مجموع** ــ مجموع أعداد حقيقية.

طرف مستقيم SIDE OF A LINE

انظر **نصف** ــ نصف مستو.

طرف معادلة MEMBER OF AN EQUATION

هو إحدى عبارتين رياضيتين بينهما إشارة تساوي.

مثال: لدينا المعادلة $x^2 + 1 = x \sin x$ فإن $x^2 + 1$ هو طرف المعادلة كما أن $x \sin x$ هو طرف آخر. وللتمييز بين هذين الطرفين نسمي $x \sin x$ **طرفا أيمن** و $x^2 + 1$ **طرفا أيسر**. أو نسمي $x^2 + 1$ **طرفا أول**، بينما $x \sin x$ **طرفا ثانياً**.

طريقة METHOD

- **طريقة الاستنفاذ:**

  انظر **استنفاذ**.

- **طريقة أصغر المربعات:**

  انظر **أصغر**.

طريقة رايلي ـــ رتز　RAYLEIGH-RITZ METHOD

طريقة لإيجاد حلول تقريبية للمعادلات الدالية، وذلك بأن يستبدل بهذه المعادلات جملاً منتهية من المعادلات. فمثلاً كل دالة مستمرة ولها مشتقات مستمرة من جميع المراتب من 1 إلى n في فترة مغلقة يمكن أن تقرب إلى أية درجة مبتغاة من الدقة بكثير حدود.

طريقة مونت كارلو　MONTE CARLO METHOD

استحدثت عام ١٩٤٥ من قبل فون نويمان (جون) وأولا م (س.م) وعرفوها بأنها طريقة لحل بعض المسائل الرياضية التعيينية باستخدام الأرقام العشوائية. مثلاً ليكن المطلوب إيجاد تقريب للتكامل المحدد $_a\int^b f(x)\,dx$ حيث $O \le A \le f(x) \le B$. نقوم بتوليد أزواج من الأرقام العشوائية (x,y) حيث x رقم عشوائي منتظم على الفترة $a \le x \le b$ و y رقم عشوائي منتظم على الفترة $A \le y \le B$. نحسب النسبة p التي تساوي عدد الأزواج (x,y) التي تحقق $y \le f(x)$ مقسوماً على عدد الأزواج الكلي. وطبقاً لطريقة مونت كارلو تكون القيمة التقريبية للتكامل $_a\int^b f(x)\,dx \simeq p(B-A)(b-a)$. أما في الـوقت الحاضر، فتعني طريقة مونت كارلو المحاكاة على الحاسب الرقمي عندما يكون من الصعب حل أو تركيب المعادلات والنماذج الرياضية التي تصف الظواهر قيد الدراسة.

طمر　IMBEDDING

الطمر هو دالة قابلة للمفاضلة $f{:}M \to M^{D'}$ من منطـو تفاضلي M إلى منطـو تفاضلي $M^{D'}$ بحيث يكون f متبايناً وغمساً. (انظر غمس). ونقول بأن M مطمور في $M^{D'}$ كمنطو جزئي.

طن　TON

وحدة وزن تساوي 1000 كيلوغرام.

طور PHASE

● **طور حركة توافقية بسيطة:**

هي الزاوية $\phi + kt$ في المعادلة $x = a\cos(\phi + kt)$ للحركة التوافقية البسيطة.

● **طور ابتدائي:**

هو الطور الموافق لـ $t = 0$ أي هو الزاوية ϕ في المعادلة $x = a\cos(\phi + kt)$.

الطوسي

هو العلامة نصير الدين بن محمد الطوسي. ولد سنة ١٢٠١ ميلادية في بلدة طواس وتوفي في بغداد سنة ١٢٧٤ ميلادية، واشتغل بالفلك والمثلثات والجبر والهندسة وإنشاء الاسطرلابات. كما كان من إنجازاته إنشاء مرصد مراغة ومكتبته التي يبلغ عدد الكتب فيها أكثر من أربعين ألف كتاب. ويرجع إليه الفضل في تأسيس علم المثلثات المستوية والكروية كعلم منظم قائم بذاته ومستقل عن الفلك كما كان الحال قبله. فقد استعمل الدوال المثلثية الست ووضع القواعد لحل المثلثات المستوية والكروية. وفي الفلك، للطوسي إنجازات يعتقد بأنها وصلت إلى كوبرنيكوس الذي أخذ عنها، ومن هذه الإنجازات مبرهنة الطوسي القائلة بأنه إذا تدحرجت دائرة من الداخل وبدون انزلاق على دائرة أخرى لها ضعف قطر الدائرة الأولى، فإن المحل الهندسي لنقطة على محيط الدائرة الصغرى يكون قطراً من أقطار الدائرة الكبرى. وأهمية هذه المبرهنة أنها تثبت إمكانية الحصول على حركة خطية نتيجة لتركيب حركتين دائرتين منتظمتين. ومنها أيضاً أن الاصطلاحات التي جاء بها كوبرنيكوس كانت مبنية على الانتقاد الذي وضعه الطوسي المجسطي والنظام الذي وضعه بطليموس، لكن هذه الصلة بين الطوسي وكوبرنيكوس غير ثابتة. ومن مؤلفات الطوسي كتاب «الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية». التي يحاول الطوسي فيها إثبات الموضوعة الخامسة لاقليدس. ففي هذه الرسالة شك

الطوسي في كون الموضوعة الخامسة واضحة وبديهية ثم عرض لمحاولات سابقيه وفند عيوبها وأخطاءها وأنهى الرسالة بقسم أخير أثبت فيه الموضوعة الخامسة.

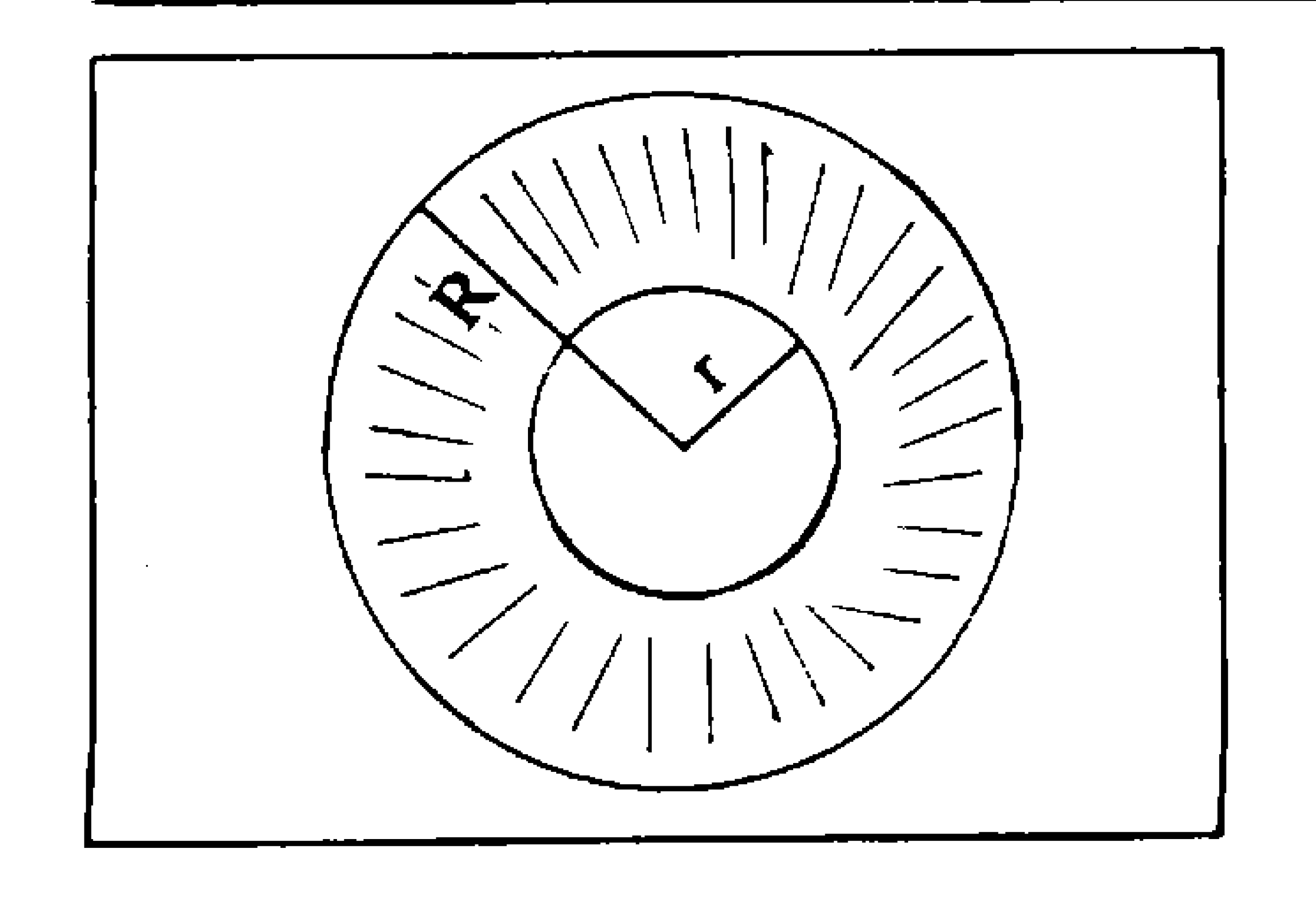
ومع أن الطوسي، كالآخرين، استبدل بالموضوعة الخامسة واحدة مكافئة لها إلا أننا وجدنا في براهينه لمحات كان فيها رائداً. ومن هذه اللمحات ما جاء في رده على ابن الهيثم في أن هذا الأخير توهم أن تساوي الأبعاد بين متوازيين يدخل في مفهوم التوازي فلم يميز بين شرح المفهوم والحد الدال على الماهية. أهمية ذلك أن الطوسي كان يدرك ويعي أن تساوي الأبعاد لا يدخل في ماهية التوازي وأنه يمكن بذلك الحديث عن التوازي بصرف النظر عن وظيفة المسافة. وهذه الفكرة بحد ذاتها فكرة متقدمة بنى عليها المعاصرون هندسة حديثة هي الهندسة التآلفية.

انظر **تآلفي**.

وللطوسي كتب أخرى مهمة في الرياضيات والفلك نذكر منها: كتاب شكل القطاع وكتاب تحرير اقليدس، وكتاب التذكرة وكتاب الأصول الموضوع وكتاب مساحة الأشكال البسيطة والكرية وكتاب تسطيح الأرض وتربيع الدائرة وكتاب قواعد الهندسة وكتاب أرخميدس في تكسير الدائرة، وعدة كتب أخرى في الفلك والحكمة والجغرافيا والطبيعيات والموسيقى والتقاويم والمنطق والأخلاق.

طوق ANNULUS

هو جزء من المستوى محصور بين دائرتين متمركزتين وتكون مساحة الطوق مساوية للفرق بين مساحتي الدائرتين. أي أن مساحة الطوق تساوي $\pi(R^2 - r^2)$ حيث ان R نصف قطر الدائرة الكبرى، r نصف قطر الصغرى.



● **طول قطعة مستقيمة:**

هو عدد الوحدات التي يمكن أن تتسع لها قطعة مستقيمة. ويعطى طول قطعة مستقيمة بدايتها A ونهايتها B بالعلاقة

$$\overline{AB} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

حيث (x_1,y_1,z_1) هي احداثيات A و (x_2,y_2,z_2) هي احداثيات B.

● **طول مستطيل أو متوازي أضلاع:**

هو طول الضلع الأطول في مستطيل أومتوازي أضلاع، ويسمى طول الضلع الآخر «العرض».

انظر عرض.

● **طول منحن:**

لتكن لدينا النقطتان A و B على منحن C ولنختر النقط $A = P_1,P_2,P_3,\ldots,P_n = B$ ابتداء من A إلى B على المنحنى C. فإذا كان لمجموع الأوتار الواصلة بين النقط المتتالية $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} +\ldots+ \overline{P_{n-1}P_n}$ حداً علوياً فإن الحد العلوي الأصغر (إن وجد) هو بالتعريف طول المنحنى بين النقطتين A و B. فإذا لم يتحقق أحد الشرطين السابقين قلنا بأن طول المنحنى من A إلى B غير معرّف.

إذا كان Γ هو منحن بسيط معطى بالمعادلات الوسيطية $x = f(t), y = g(t), z = h(t)$ حيث $a \leq t \leq b$، فإن طول هذا المنحنى يكون معرفاً إذا كانت الدوال f,g,h قابلة للمفاضلة في الفترة [a,b] وكانت المشتقات f',g',h' محدودة في [a,b]. إذا كانت المشتقات f',g',h' مستمرة في [a,b] إضافة إلى ما سبق فإن طول المنحنى Γ يساوي:

$$\int_a^b [f'(^2_t) + g'(^2_t) + h'(^2_t)]^{\frac{1}{2}} dt$$

فإذا كان المنحنى مستوائياً ومعادلته هي $y = f(x)$ في الفترة $x_1 \leq x \leq x_2$

فإن طول هذا المنحنى يكون معرفاً إذا كان $\frac{dy}{dx}$ مستمراً في الفترة $[x_1,x_2]$ ويعطى الطول بالعلاقة:

$$\int_{x_1}^{x_2} [1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

ويعطى الطول في الاحداثيات القطبية بالشكل:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} [r^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2]^{\frac{1}{2}} d\theta$$

طويل LONG

● **قسمة طويلة:**

انظر قسمة ــ قسمة قصيرة وقسمة طويلة.

طيف SPECTRUM

● **طيف تحويل (مؤثر):**

إذا كان لدينا المصفوفة A فإن طيفها هو مجموعة القيم الذاتية λ لهذه المصفوفة المعرفة بالعلاقة $\det(\lambda I - A) = 0$. وبشكل عام ليكن لدينا التحويل الخطي T لفضاء المتجهات L إلى نفسه وليكن I التحويل المطابق أي $I(x) \equiv x$ عندئذ فإن طيف T يتألف من ثلاث مجموعات منفصلة (غير متقاطعة) مثنى مثنى:

(1) **طيف نقطي:** هو مجموعة من الأعداد بحيث لا يكون للمؤثر (التحويل) $T - \lambda I$ معاكس (أي ليس واحد لواحد).

(2) **طيف مستمر:** هو مجموعة الأعداد λ التي يكون من أجلها $(T - \lambda I)^{-1}$ موجوداً وغير محدود (أي ليس مستمراً) ومجاله كثيفاً في L.

(3) **طيف راسبي:** هو مجموعة الأعداد λ التي يكون من أجلها $(T - \lambda I)^{-1}$ موجوداً ولكن مجاله ليس كثيفاً في L.

(4) **مجموعة مفككة**: هي مجموعة الأعداد λ التي لا تنتمي إلى الطيف (بأنواعه الثلاثة)، ولكنها تتألف من الأعداد λ التي يكون من أجلها $(T - \lambda I)^{-1}$ موجوداً ومحدوداً ومجاله كثيفاً.

ونظراً لأهمية الطيف في المؤثرات (التحويلات) الخطية نورد بعض الحقائق المهمة عن الطيف:

(1) إذا كان فضاء المتجهات L ذا عدد منته من الأبعاد وكان T تحويلاً للمتجه $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ إلى المتجه $T(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ وفق العلاقة $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ عندئذ فإن الطيف النقطي لـ T هو الطيف بكامله للمؤثر T وهو مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة $A = (a_{ij})$.

(2) إذا كان λ_0 هو الطيف النقطي للمؤثر T فإنه يوجد متجه $x \neq 0$ بحيث يكون $T(x) = \lambda_0 x$، حيث λ_0 هي القيمة الذاتية لـ T و x هو المتجه الذاتي لـ T.

(3) إن الفضاء الخطي للمتجهات الذاتية الموافقة للقيمة λ_0 هو **منطوى** القيم الذاتية الموافقة لـ λ_0.

(4) إذا كان L فضاء بناخ فإن الطيف مجموعة غير خالية.

(5) إذا كان T مؤثراً خطياً محدوداً وكان $\|T\| < |\lambda|$ فإن λ تنتمي إلى المجموعة المفككة كما أن $(T - \lambda I)^{-1} = - \sum_{1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$.

(6) إذا كان L هو فضاء هيلبرت (عقدي) وكانت λ تنتمي إلى الطيف الراسبي فإن $\bar{\lambda}$ (مرافق λ) تنتمي إلى الطيف النقطي للمؤثر T^*، أما إذا كانت λ تنتمي إلى الطيف النقطي للمؤثر T فإن $\bar{\lambda}$ تنتمي إلى الطيف النقطي أو الطيف الراسبي للمؤثر T^*.

(7) إذا كان المؤثر T هرميتياً أو معتدلاً أو وحدياً فإن الطيف الراسبي للمؤثر T هو مجموعة خالية.

(8) إذا كان T هرميتياً فإن جميع أعداد الطيف حقيقية. أما إذا كان T وحدياً فإن جميع أعداد الطيف تقع على الدائرة $|z| = 1$.

مثال: لتكن $u_1,u_2,...$ متتالية متعامدة تامة في فضاء هيلبرت و $\lambda_1,\lambda_2,...$ متتالية أعداد نهايتها 1 $(\lambda_n \neq 1)$ و T هو التحويل الخطي المعرف بالعلاقة $T(\sum_1^\infty a_i u_i) = \sum_1^\infty a_i \lambda_i u_i$ عندئذ فإن الأعداد $\lambda_1,\lambda_2,...$ تؤلف الطيف النقطي، لأن $(T - I)^{-1}$ موجود وغير محدود ولكن يوجد له مجال كثيف. وهكذا فإن 1 تنتمي إلى الطيف المستمر. أما باقي الأعداد غير المساوية إلى 1 أو $\lambda_i(i = 1,2,...)$ فإنها تنتمي إلى المجموعة المفككة.

انظر قرين ــ قرين تحويل (مؤثر)؛ انظر طيفي ــ مبرهنة الطيف.

طيفي SPECTRAL

● قياس وتكامل طيفي:

ليكن H فضاء هيلبرت و S مجموعة مع جبر من σ معين هو A للمجموعات الجزئية.

● القياس الطيفي:

على S هو دالة تقابل إسقاطاً $P(X)$ لكل عنصر X من A بحيث ان $P(S)$ هو التحويل المطابق على H وأن $P(\cup_1^\infty X_k) = \sum_1^\infty P(X_k)$ من أجل أي متتالية من المجموعات $X_1,X_2,...$ المنفصلة (غير المتقاطعة) زوجاً زوجاً والمنتمية إلى A. وينتج أنه إذا كان $X_1 \subset X_2$ فإن $P(X_2 - X_1) = P(X_2) - P(X_1)$ كما أن $P(X_1) \leq P(X_2)$، حيث نقصد بالرمز ≤ أن مدى $P(X_1)$ محتوى في مدى $P(X_2)$ ولدينا أيضاً $P(X_1).(P(X_2) = P(X_1)$ من أجل أي عنصرين X_2 و X_1 من A يتحقق لدينا

$$P(X_1 \cup X_2) + P(X_1 \cap X_2) = P(X_1) + P(X_2)$$

$$P(X_1 \cap X_2) = P(X_1).\ P(X_2)$$

إذا كان العنصران X_1 و X_2 غير متقاطعين فإن مدى $P(X_1)$ ومدى $P(X_2)$ متعامدان.

إذا كان S هو المستوى العقدي (أو أي مجموعة جزئية منه) وكان A

هو جبر من σ لمجموعات بوريل فإن للقياس الطيفي الخاصة الجمعية، أي أنه إذا كان X عنصراً من A فإن مدى $P(x)$ يساوي $\cup P_a$ حيث P_a هو مدى الإسقاط $P(X_a)$ للمجموعة الجزئية المتراصة X_a من X.

● **طيف القياس الطيفي:**

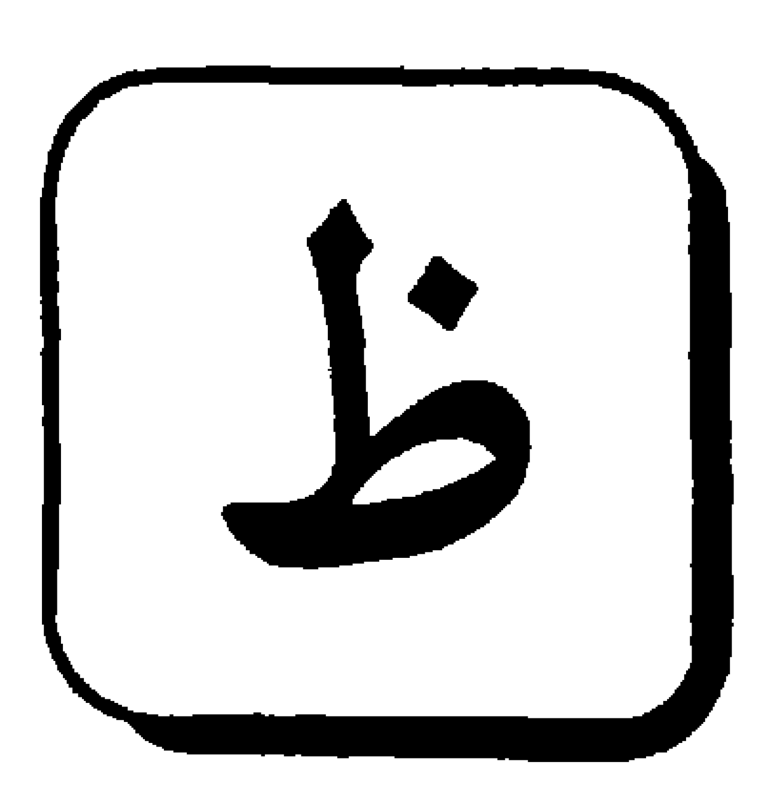
هو متمم اتحاد جميع المجموعات المفتوحة U التي يكون من أجلها $P(U)=0$. إذا كان الطيف محدوداً وكان $f(\lambda)$ دالة حقيقية أو عقدية قابلة للقياس ومحدودة (بوريل) فإن $T = \int f(\lambda)dP$ تعرف تحويلاً (مؤثراً) محدوداً بمعنى أن المجاميع المقربة للتكامل تعرف مؤثرات تتقارب إلى T بالمعيار. من أجل أي عنصرين x و y لفضاء هيلبرت فإن $m(X) = (P(X)x,y)$ تعرف قياساً عقدي القيمة على A كما أن $< Tx,y > = \int f(\lambda)dm$ وينتج أن $\int f.g\, dP = \int f\, dP.\int g\, dP$. كما ينتج أنه إذا كانت الدالة f مستمرة وكان $\|\int f(\lambda)dP\|$ هو أصغر حد أعلى لـ $|\lambda|$ من أجل λ المنتمية إلى الطيف فإن طيف التحويل $T = \int \lambda\, dP$ يتطابق مع طيف القياس الطيفي.

إذا كان الطيف غير محدود بينما f محدود على مجموعات محدودة فإن $\int f(\lambda)dP$ هو التحويل الوحيد الذي يتطابق مع $\int f_x(\lambda)\, dP$ على مدى الإسقاط $P(X)$ لكل مجموعة X محدودة من A، حيث يتطابق f_x مع f على X ويكون صفراً على متممة X.

● **مبرهنة الطيف:**

من أجل أي تحويل T هرميتي أو معتدل أو وحدي معرف على فضاء هيلبرت يوجد قياس طيفي وحيد معرف على مجموعات بوريل للمستوى العقدي يكون من أجله $T = \int \lambda\, dP$ إذا كان T هرميتياً فإن $P(X) = 0$ إذا كانت X لا تقطع المستقيم الحقيقي وأمكن اعتبار $\int \lambda\, dP$ تكاملاً على طول المستقيم الحقيقي. إذا كان T وحدياً فإن $P(X) = 0$ إذا كانت X لا تقطع الدائرة $|z| = 1$ وأمكن اعتبار $\int \lambda\, dP$ تكاملاً على هذه الدائرة.





ظاهري APPARENT

- **مسافة ظاهرية:**

انظر **مسافة** ــ مسافة زاوية بين نقطتين.

- **زمن ظاهري:**

أو زمن شمسي ظاهري.

انظر زمن.

ظل

انظر **مثلثي** ــ دوال مثلثية.

- **دالة الظل:**

انظر مثلثي ــ دوال مثلثية.

- **صيغ الظل في المثلثات الكروية:**

نفس **صيغ نصف الزاوية ونصف الضلع**، انظر مثلثات.

- **قانون الظل:**

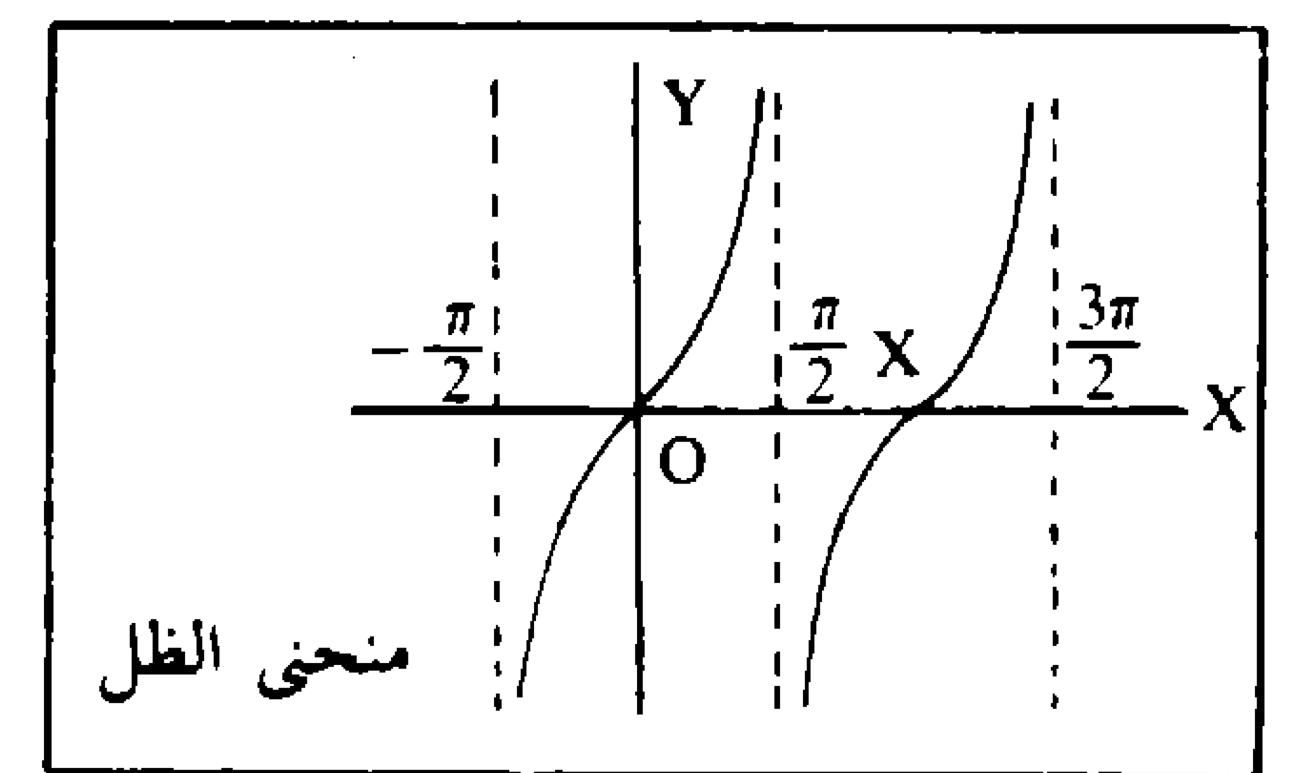
علاقة بين ضلعين في مثلث مستوى والزاويتين المقابلتين لهما، والقانون هو:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan {}^1/_2\,(A-B)}{\tan {}^1/_2\,(A+B)}$$

حيث a هو الضلع المقابل للزاوية A و b هو الضلع المقابل للزاوية B في المثلث.

● **منحنى الظل:**

هو بيان الدالة $y = \tan x$ ولهذا البيان نقطة انعطاف عند نقطة الأصل ويكون فرعه المار بنقطة الأصل مقارباً للخطين $x = -\frac{1}{2}\pi$، $x = \frac{1}{2}\pi$ وهذا البيان دوري يكرر نفسه في فترات متتالية طول كل منها π.



انظر مثلثي ــ دوال مثلثية.

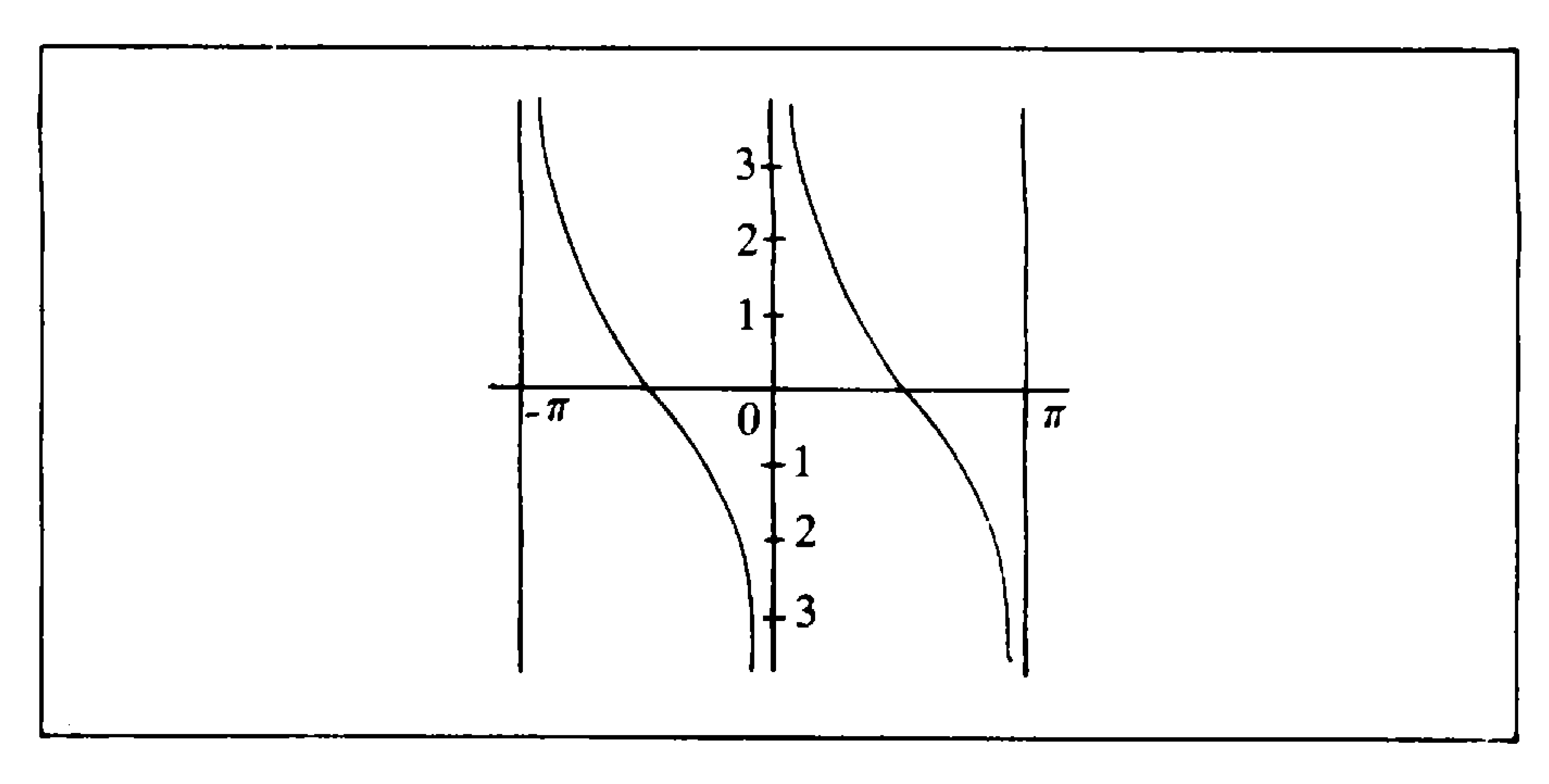
ظل تمام   COTANGENT

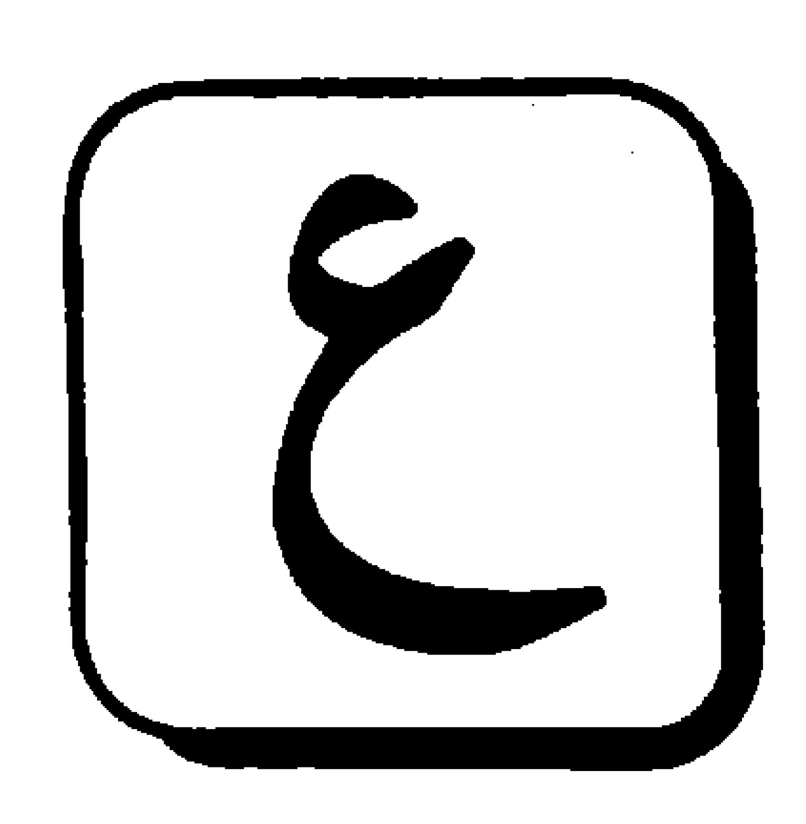
انظر مثلثي ــ دوال مثلثية.

● **منحنى ظل تمام:**

هو بيان المعادلة $(y = \cot x)$، وهو مقارب للخطوط $(x = m\pi, x = 0)$ ويقطع محور (x) عند $(k\pi/2)$ راديان حيث ان:

$$k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$





ع — Y

● **محور y:**

هو المستقيم الرأسي المار بنقطة في المستوى الاحداثي الديكارتي. ويكون اتجاه هذا المحور من الأسفل إلى الأعلى. انظر ديكارتي ـ محاور ديكارتية.

عائلة — FAMILY

● **عائلة من السطوح:**

لتكن لدينا المعادلة $f(x, y, z, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ ولنفرض أن هذه المعادلة تمثل سطحاً من أجل كل مجموعة من قيم الثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ عندئذٍ فإن مجموعة السطوح التي نحصل عليها من إعطاء قيم مختلفة لهذه الثوابت تسمى **عائلة سطوح ذات n وسيطاً**.

● **عائلة من المنحنيات:**

لنفرض أن لدينا مجموعة من المنحنيات حصلنا على معادلاتها بتغيير n من الثوابت الأساسية الموجودة في معادلة معطاة، فإن هذه المجموعة تسمى **بعائلة منحنيات من n وسيطاً** مثل مجموعة المنحنيات التي معادلاتها حلول لا منفردة لمعادلة تفاضلية ذات مرتبة n. وكذلك فإن مجموعة الدوائر المتمركزة تكون **عائلة من المنحنيات من وسيط واحد** حيث يكون الوسيط هو نصف القطر. أما مجموعة الدوائر في المستوى والتي لها نفس نصف القطر فإنها **عائلة من المنحنيات من وسيطين** حيث يكون إحداثيا المركز هما الوسيطين. وتشكل كل الدوائر في

المستوى عائلة من المنحنيات من ثلاثة وسطاء. وأما المخروطيات في المستوى فهي عائلة من خمسة وسائط.

وكمثال أخير نذكر أن مجموعة الماسات لدائرة معطاة تشكل عائلة من المستقيمات من وسيط واحد.

FLOATING **عائم**

● **نقطة عشرية عائمة:**

هو مصطلح يستخدم في الحاسب الآلي عندما لا تكون النقطةالعشرية ثابتة عند محل معين في الآلة طوال إجراء الحسابات بل توضع آلياً عند إجراء كل عملية.

TRANSIENT **عابر**

● **حالة عابرة:**

انظر معاود.

VULAGAR **عادي**

● **كسر عادي:**

انظر كسر.

ORDINARY **عادي**

● **معادلة تفاضلية عادية:**

انظر تفاضل ـ معادلة تفاضلية.

● **نقطة عادية على منحن:**

انظر نقطة.

عام GENERAL

أي غير محدد أو مخصوص ويغطي كل الحالات الخاصة. والأمثلة على ذلك كثيرة نورد منها:

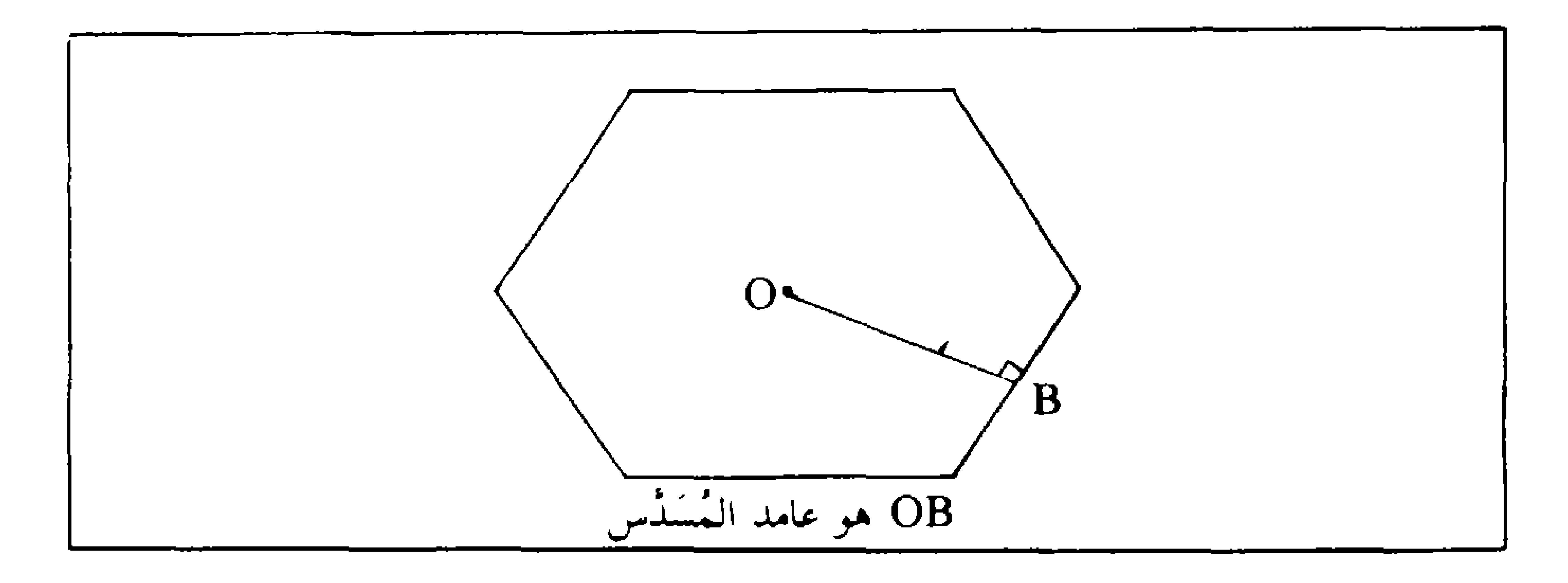
(1) المعادلة العامة لكثير الحدود ـ أنظر معادلة.

(2) الحد العام ـ أنظر حد.

(3) الحل العام للمعادلة التفاضلية ـ أنظر تفاضل.

عامد APOTHEM

العامد هو المسافة العمودية بين مركز مضلع منتظم وأي من أضلاعه.



OB هو عامد المُسَدَّس

عامل FACTOR

● **عامل التكميل (معادلات تفاضلية):**

هو عامل إذا ضرب في معادلة تفاضلية صفرية تصبح المعادلة مضبوطة (تامة).

مثال (1): إذا ضربنا المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{x} + \frac{y}{x^2}\,dx = 0$ بالكمية x^2 فإننا نحصل على $xdy + ydx = 0$ وهي معادلة مضبوطة، لأن $d(xy) = xdy + ydx = 0$ ولذا فإن حلها يكون $xy = c$.

مثال (2): نلاحظ أيضاً أن x^2 هو عامل تكميل المعادلة التفاضلية:

$$xy'' + (3 - x^3)y' - 5x^2y + 4x = 0$$

وبضرب المعادلة في x^2 نحصل على $\frac{d}{dx}(x^3y' - x^5y + x^4) = 0$.

انظر **قرين** ــ قرين المعادلة التفاضلية.

● **عامل عدد صحيح n:**

هو عدد صحيح حاصل ضربه مع عدد صحيح معين يساوي n. فمثلاً العددان 3 و 4 هما عاملان للعدد 12 لأن $12 = 4 \cdot 3$ والعوامل الموجبة للعدد 12 هي 1، 2، 3، 4، 6، 12، أما العوامل السالبة، فهي $-1, -2, -3, -4, -6, -12$.

وهناك اختبارات معينة لمعرفة فيما إذا كان العدد الصحيح عاملاً لعدد معين.

انظر **قابل للقسمة**.

● **عامل كثير الحدود f(x):**

هو كثير حدود ضمن مجموعة من كثيرات الحدود يكون جداؤها مساوياً f(x). وكل كثير حدود ضمن هذه المجموعة يسمى أيضاً عاملاً. وتجدر الإشارةهنا إلى أن المعاملات في عوامل كثير الحدود يجب أن تكون كلها في حقل **أو مجال** معين. وإذا لم يعين حقل المعاملات هذا فإنه يفهم من ذلك أن الحقل يكون حقل معاملات كثير الحدود f(x) المطلوب إعماله.

مثال (1): لكثير الحدود $x^2 - y^2$ العاملان $x - y$ و $x + y$.

مثال (2): لكثير الحدود $x^2 - 2y^2$ العاملان $(x - \sqrt{2}y)$ و $(x + \sqrt{2}y)$ في حقل الأعداد الحقيقية.

مثال (3): لكثير الحدود $x^2 + y^2$ العاملان $(x + iy)$ و $(x - iy)$ في حقل الأعداد العقدية.

انظر **تحليل إلى عوامل، ولا مختزل** ــ كثير حدود لا مختزل.

● **عامل الحد:**

هو أي قاسم للحد. فمثلاً $(x + 1)$ عامل للكمية $3x^{1/2}(x + 1)$.

● **العامل مقياس P:**

نسمي $d(x)$ عامل مقياس P للكمية $f(x)$ إذا تحقق ما يلي:

$f(x) = g(x)\, d(x) + r(x)$ (مقياس P) و $r(x) = 0$ (مقياس P).

● **فضاء العامل (زمرة العامل وحلقة العامل وإلخ):**

انظر فضاء الخارج.

● **مبرهنة العامل:**

وتنص هذه المبرهنة على أن كثير الحدود $f(x)$ في x يقبل القسمة على $(x - a)$ إذا كان $f(a) = 0$.

انظر باقي ــ مبرهنة الباقي.

وعكس مبرهنة العامل صحيح أيضاً، أي إذا كان $(x - a)$ عاملاً لكثير الحدود $f(x)$ فإن $f(a) = 0$.

● **وحيد الحد:**

انظر عامل وحيد الحد.

عامل محايد **IDEMFACTOR**

يسمى المتجه الثناوي $\overline{\vec{k}}\,\overline{\vec{k}} + \overline{\vec{i}}\,\overline{\vec{j}} + \overline{\vec{i}}\,\overline{\vec{i}}$ بالعامل المحايد لأن جداؤه السلمي مع أي متجه (بأي ترتيب) لا يغير المتجه.

انظر ثناء.

العامل المشترك الاعلى **HIGHEST COMMON FACTIN**

هو إسم مرادف للقاسم المشترك الأعظم.

انظر قاسم.

عاملي n **FACTORIAL n**

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن عاملي n الذي نرمز له بالرمز $n!$ يعرف كما يلي: $n! = n(n - 1)\,(n - 2)\,\ldots\,3.2.1$

فمثلاً $1! = 1$, $2! = 2.1 = 2$, $3! = 3.2.1 = 6$ أما $0!$ أي **عاملي الصفر** فيعرف بأنه يساوي 1 مثل عاملي الواحد تماماً. ولهذا بعض الفائدة عند كتابة صيغة معامل ثنائي الحد العام $[\, n!/[r!(n-r)!\,]$. وعندما يكون $r = 0$ أو $r = n$ فإنه يلزم تعريف $0!$ لكي تكون الصيغة صالحة في هاتين الحالتين.

- **العزم العاملي:**

انظر **عزم** ــ عزم التوزيع.

- **المتسلسلة العاملية:**

انظر **متسلسلة** ــ متسلسلة عاملية.

عاملي جزئي — SUBFACTORIAL

- **عاملي جزئي لعدد صحيح:**

العدد العاملي الجزئي للعدد الصحيح n هو:

$$(n!)\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

ويلاحظ أن المقدار داخل القوسين الكبيرين هو مجموع أول $(n + 1)$ من حدود منشور ماك لوران للدالة e^x حيث $x = -1$ مثلاً العاملي الجزئي للعدد 4، هو:

$$(4!)\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = 24\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9$$

عبارة — EXPRESSION

والعبارة مصطلح عام جداً يستخدم على أية صيغة رياضية رمزية. وعلى سبيل المثال فكثير الحدود عبارة.

عجلي TROCHOID

هو المحل الهندسي المستوي لنقطة P على نصف قطر دائرة أو على امتداده عندما تتدحرج هذه الدائرة على مستقيم ثابت. فإذا كان a هو نصف قطر الدائرة المتدحرجة وكان b بعد P (أو P′) عن مركز الدائرة المتدحرجة C وكانت θ هي الزاوية (بالراديان) MĈP فإن المعادلات الوسيطية للعجلي تأخذ الشكل:

$$x = a\theta - b \sin \theta,$$
$$y = a - b \cos \theta$$

فإذا كانت b>a فإن للمنحنى عروة بين كل قنطرتين وتعطى العقد بالعلاقة $\theta = \theta_1 + n\pi$، حيث $a\theta_1 - b \sin \theta_1 = 0, 0<\theta_1<\pi$. ونسمي العجلي عندئذٍ عجلياً متطاولاً.

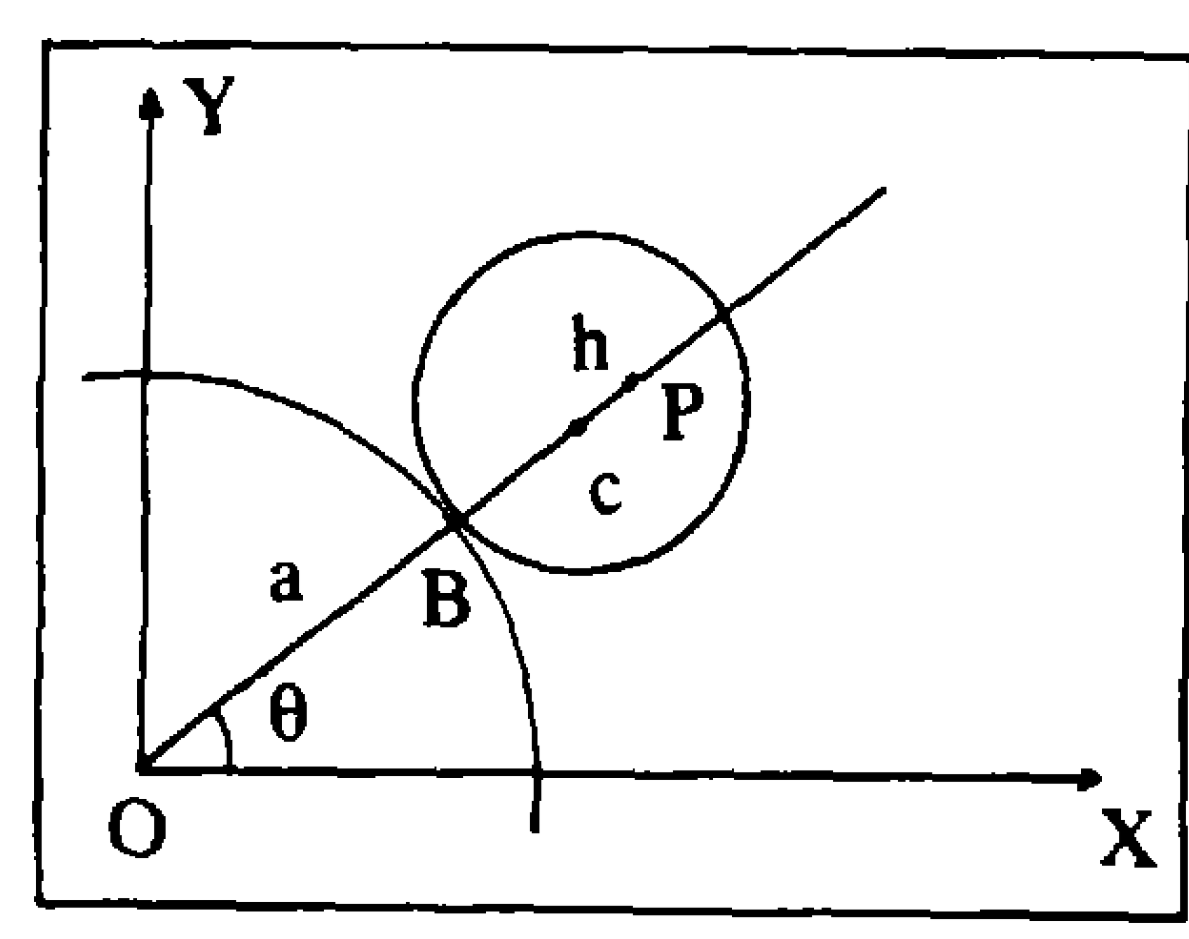
أما إذا كان b<a فإن العجلي يدعى عجلياً متقلصاً.

فإذا كان b = a نحصل على عجلي النظامي.

عجلي خارجي EPITROCHOID

هو تعميم للدويري الخارجي حيث يمكن اختيار النقطة P في أي مكان على نصف قطر الدائرة المتدحرجة أو امتداده.

وإذا كانت h هي المسافة بين مركز الدائرة المتدحرجة c والنقطة الواصفة P وكان نصف قطر الدائرة الثابتة OB مساوياً للمقدار a



ومقدار الزاوية المحصورة بين OA و OB مساوياً θ فإن المعادلات الوسيطية للعجلي الخارجي الناتج:

$$x = (a + b) \cos \theta - h \cos [(a + b) \theta/b]$$

$$y = (a + b) \sin \theta - h \sin [(a+ b) \theta/b]$$

انظر **عجلي**.

عد **NUMERATION**

وهـو عملية وضع وكتابة الأعداد بترتيبها الطبيعي.

عد **CONTING**

● **عدد العد**:

الأعداد المستعملة في عد الأشياء. قد يعني ذلك مجموعة الأعـداد الصحيحة الموجبة ....1,2,3 وقد يعني أيضاً هذه المجموعة مضافاً إليهـا العدد 0 لأنه يمكن اعتبار العدد 0 عدد عناصر المجموعة الخالية.

عدّاد **CONTER**

العـداد في الآلات الحاسبـة هومضيف لا يستقبـل سوى مضـافـات مقدارها 1 وتبنى العدادات عادة بواسطة عدادات بسيطة مقياس 2، ونقصد بعداد مقياس 2 مركبة حسابية بسيطة تكون في واحدة من حالتي رسوخها وفقاً لعدد الدفعات تستقبلها وإذا ما كان هذا العدد فردياً أو زوجياً.

انظر **مضيف**.

عدد **NUMBER**

لا يمكن في الحقيقة إعطاء تعريف محدد للعدد، إذ ان العدد كمفهوم وكرمز قد مر عبر العصور التاريخية بعدة مراحل.

ففي **المرحلة الأولى**: كان الانسان القديم ينظر للأشياء المحيطة به على أنها وحدة متكاملة وأنه جزء من هذه الوحدة.

في المرحلة الثانية: بدأ الانسان يعي أكثر فأكثر أنه مختلف ومتميز وتكرس عنده مفهوم الملكية والسيطرة والتعرف على الأشياء من حيث أوصافها، ودون أن يشعر تعرف على (العدد) 1 (بالطبع لم يكن يعد واحد، اثنان. . .). فبدأ يعد الأشياء مستخدماً (هذا واحد وهذا واحد. . .) ونشير هنا إلى أن الانسان في هذه المرحلة بدأ يشعر بالحاجة أكثر وأكثر إلى تكوين المجتمعات وبالتالي إلى أسلوب ما للتفاهم ونقصد به اللغة، لن نتعرض هنا إلى موضوع اللغة وكيفية تطورها، فهذا يختص به أهل اللغة.

أما **في المرحلة الثالثة**: فقد بدأت فكرة مقابلة الأشياء ببعضها، فأصابع اليد اليمنى تقابل أصابع الرجل (واحد ــ لواحد).

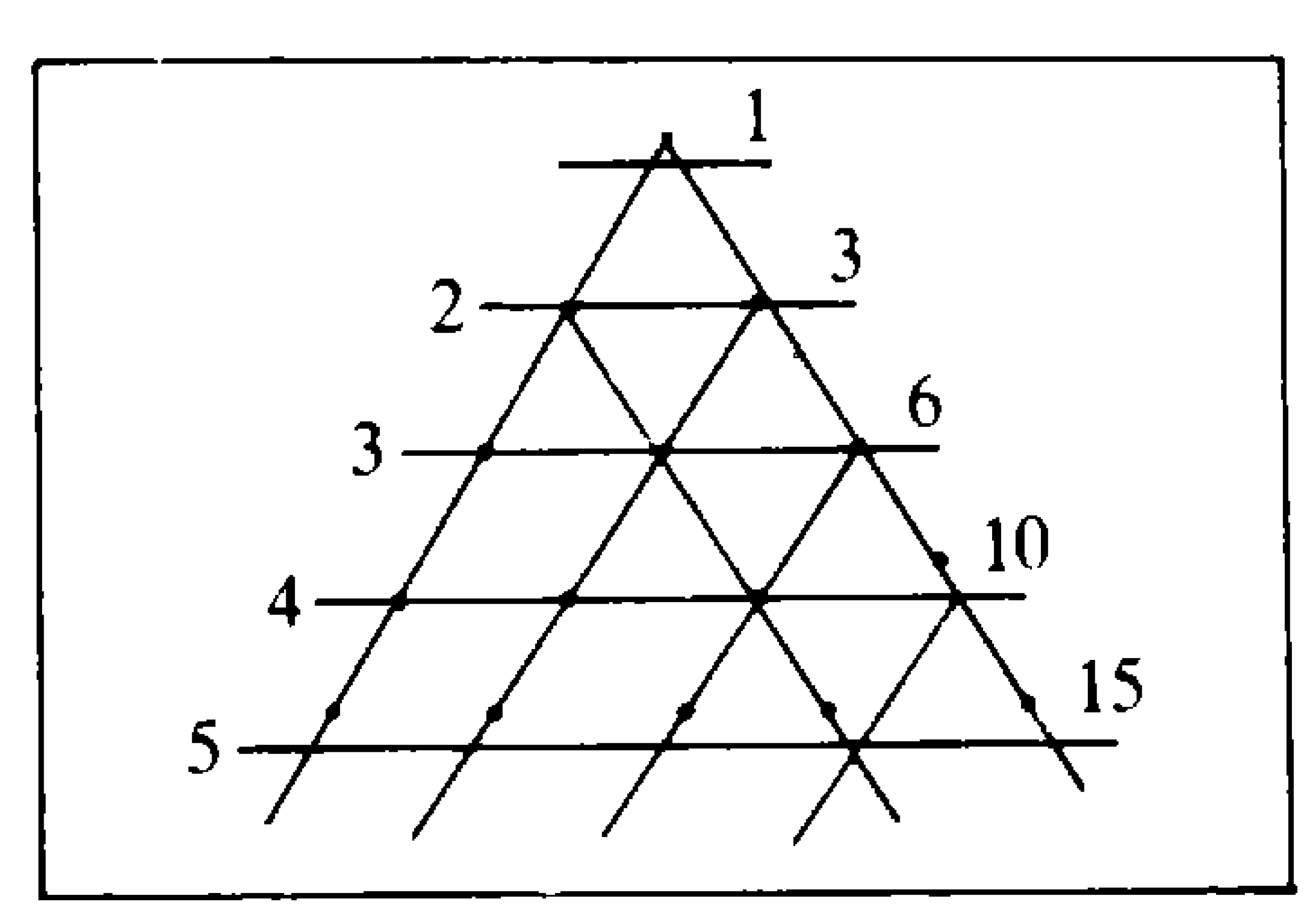
في المرحلة الرابعة: أدرك الانسان معنى التساوي وبدأ يبحث عما يشير به إلى مجموعات متساوية بمفهوم واحد ــ لواحد. وفي هذه المرحلة التي تطورت فيها اللغة الصوتية بدأ الانسان يفكر في اللغة الرمزية، ولا نستطيع هنا أن نقول بأن اللغة الرمزية الكتابية لم تكن موجودة أبداً، بل كانت موجودة ولكن حاجة الانسان إلى التعامل مع المجموعات المتساوية، دفعته إلى البدء بالترميز (أي ترميز الصفات للمجموعات المتساوية) وتطورت هذه الرموز التي تمثل الأعداد عبر العصور، فمرت بالاشارات إلى طريقة في الرمز بدءاً من الهيروغليفية وانتهاء بنظام العد الثنائي المستخدم في الآلات الحاسبة. من كل هذا نستنتج أن **العدد كمفهوم** يمكن أن يعرّف بشكل عام على أنه الصفة المشتركة بين مجموعات متساوية وفق مبدأ التساوي واحد ــ لواحد.

أما الشيء الطريف والمثير للانتباه من هذا الاستعراض فهو أن الرياضيات المعاصرة التي تبدأ بدراسة المجموعات ومفهوم التساوي. . الخ ليست أمراً جديداً وإنما هو الأسلوب الذي تعرف به الانسان على العدد. وليست هذه الثورة الرياضية سوى عودة إلى الأصول. أكثر من ذلك فإن ابتكار نظام العد الثنائي هو عودة إلى الأصول أيضاً إذا علمنا أن جوهر هذا التفكير بدأ في أقدم العصور عندما كان مفهوم الثنائية (ذكر ــ أنثى، ليل ــ نهار، موت ــ حياة. .) يسيطر على تفكير الصينيين القدماء.

وليس المقصود من هذا الكلام أن الحضارة الشاهقة التي بناها الانسان اليوم ليست شيئاً يذكر بل أن العودة إلى الأصول مع امتلاك أدوات ووسائل أكثر تقدماً هو أمر لا شك يعطي مشاعل رائعة في طريق الحضارة الانسانية.

● **أعداد مثلثية:**

هي الأعداد 1,3,6,10,... وتمثل عدد النقاط المطلوبة لتشكيل صفوف من المثلثات، ويبين الشكل أننا بدأنا بنقطة ثم نضيف نقطتين ليكون مجموع النقط المشكلة للمثلث الأول 3 ثم نضيف 3 نقط ليكون مجموع النقط المشكلة للمثلثات الجديدة في الصف الثالث هو 6 وهكذا، أما عدد النقط الموجودة على الصف n وجميع الصفوف العليا فيساوي $1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.



● **أعداد مربعة:**

هي الأعداد $1,4,9,16,25,...,n^2$ التي تمثل مربعات الأعداد الصحيحة.

● **صنف الأعداد مقياس n:**

نقول بأن العدد x يطابق العدد y مقياس n إذا كان باقي قسمة x على n يساوي باقي قسمة y على n ونكتب $x=y(\text{mod } n)$.

وتنقسم مجموعة الأعداد الصحيحة إلى أصناف بحسب n. نسمي كل صنف باسم صنف الأعداد مقياس n.

مثال: يوجد صنفان للأعداد مقياس 2 هما صنف الواحد [1] وصنف الصفر [0] بحيث

$$[1] = \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, \pm9, \pm11, ...\}$$

$$[0] = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, ...\}$$

أي التي تتطابق بواقي قسمتها على 2.

مثال: صنوف الأعداد مقياس 3 في مجموعة الأعداد الطبيعية هي

$$[2] = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$[0] = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

- **عدد أصم:**

هو أي عدد لا يمكن أن يكتب بالشكل $\frac{m}{n}$ مثل

$\dots \ell n2, e, \pi, \sqrt{5}, \sqrt{2}$

وتكوّن هذه المجموعة ما يسمى **مجموعة الأعداد الصماء** ونرمز لها بالرمز S.

- **عدد تعييني:**

هو العدد الذي نرفق معه وحدة قياس فيصبح له معنى لتعيين القياس. كأن نقول 5 أمتار أو 5 كيلوغرام أو 5 درجات فالعدد خمسة في كل حالة هو عدد تعييني.

- **عدد حقيقي:**

هو أي عنصر ينتمي إلى المجموعة Q أو S، وهكذا فإن مجموعة الأعداد المنطقة Q والأعداد الصماء S تكوّن معاً ما نسميه مجموعة الأعداد الحقيقية التي نرمز لها بالرمز R.

- **عدد صحيح:**

هو أي عنصر من عناصر المجموعة

$$I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- **عدد طبيعي:**

هو أي عنصر من عناصر المجموعة $N = \{1,2,3,,,\dots\}$

وتسمى هذه الأعداد مجموعة الأعداد الطبيعية.

- **عدد عقدي (مركب):**

هو أي عدد من الشكل a+ib حيث $a \epsilon R$ و $b \epsilon R$، $i=\sqrt{-1}$. ونشير هنا

إلى أن الأعداد العقدية تكوّن مجموعة الأعداد العقدية التي نرمز لها بالرمز C. فإذا كان b=0 حصلنا على مجموعة الأعداد الحقيقية.

وتجدر الاشارة إلى أن المجموعات العددية ترتبط بعلاقة الاحتواء التالية

$$N \subset I \subset Q \subset R \subset C$$

كما أن الأعداد الطبيعية هي الأعداد الصحيحة الموجبة.

- **عدد كامل:**

هو عدد صحيح يساوي مجموع جميع الأعداد التي يقسم عليها بدون باق ما عدا العدد نفسه.

مثال: 28 هو عدد كامل لأن $14 + 7 + 4 + 2 + 1 = 28$

- **عدد مختل:**

هو عدد صحيح بحيث يكون مجموع جميع الأعداد التي يقسم عليها بدون باق ما عدا العدد نفسه أصغر من العدد الأصلي. أما إذا كان هذا المجموع أكبر من العدد الأصلي فإننا نسمي العدد باسم **عدد زائد**.

مثال: العدد 15 هو **عدد مختل** لأن $15 > 5 + 3 + 1$ بينما العدد 20 هو عدد زائد لأن $20 < 10 + 5 + 4 + 4 + 2 + 1$.

- **عدد منطق (كسري، نسبي):**

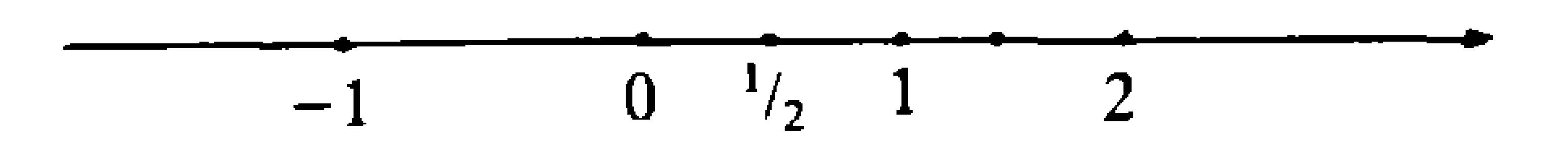
هو أي عنصر من عناصر المجموعة $Q = \{\frac{m}{n} | m \in I, n \in I - \{0\}\}$.

- **غربال عددي:**

هو وسيلة ميكانيكية لتحليل الأعداد الكبيرة إلى عواملها.

- **محور الأعداد الحقيقية:**

هو خط مستقيم موجه



نقابل كل نقطة عليه بعدد حقيقي وكل عدد حقيقي بنقطة.

- **نظام عددي:**

هو طريقة يتم فيها ترتيب الأرقام لتشير إلى الأعداد. فهناك النظام الثنائي والعشري والاثنا عشري. فالنظام العشري مثلاً يعبر عن العدد ثلاثين وستة بالرمز 36 بينما نعبر عن العدد 3 في النظام الثنائي بالشكل 11.

- **نظام عددي رياضي:**

هو مجموعة من الأعداد مع مجموعة من الموضوعات وبعض العمليات المطبقة على هذه الأعداد كمجموعة الأعداد الحقيقية.

- **أعداد برنولي:** انظر برنولي.
- **أعداد متحابة:** انظر متحاب.
- **أعداد فيرما:** انظر فيرما.
- **أعداد فيثاغورس:** انظر فيثاغورس.
- **أعداد عشوائية:** انظر عشوائي ـ جدول الأعداد العشوائية.
- **أعداد موغلة:** انظر موغل.
- **عدد مطلق:** انظر مطلق.
- **عدد مجرد:** انظر مجرد.
- **عدد رئيسي:** انظر رئيسي.
- **عدد كايلي:** انظر كايلي.
- **عدد مادي:** انظر مادي.
- **عدد عدّي:** انظر عدّ.
- **عدد تخيلي:** انظر عقدي.
- **عدد ليوفيل:** انظر ليوفيل.
- **عدد مختلط:** انظر مختلط.
- **عدد سالب، موجب:** انظر موجب.
- **عدد معتدل:** انظر معتدل.
- **عدد ترتيبي:** انظر ترتيبي.

- حقل عددي: انظر حقل.
- سلم عددي: انظر سلّم.
- نظرية العدد: انظر نظرية.

عدد صحيح INTEGER

تتكون مجموعة الأعداد الصحيحة Z من الأعداد

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

تنقسم Z إلى مجموعتين:

(1) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $Z^+ = \{1,2,3,\ldots\}$.

(2) مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $Z^- = \{-1,-2,-3,\ldots\}$ وأحياناً يضاف الصفر إلى Z^+ أو Z^-.

وقد عرف بيانو Z^+ بأنها مجموعة العناصر التي تحقق المصادرات التالية:

(1) لكل $a \epsilon Z$ يوجد عنصر $a^+ \epsilon Z$ يسمى «تالي» لـ a أو يقال أيضاً أن a «مقدم» لـ a^+.

(2) يوجد عدد صحيح موجب 1 أي أن $1 \epsilon Z^+$

(3) ليس للعدد 1 عدد مقدم.

(4) إذا كان $a^+ = b^+$ فإن $a = b$ لأي عددين $a,b \epsilon Z^+$.

(5) إذا احتوت مجموعة جزئية A من Z^+ على العدد 1 وعلى كل عدد تال له فإن $A = Z^+$.

ويمكن النظر إلى العدد الصحيح الموجب على أنه رمز يقترن بمجموعة ما، أو بجميع المجموعات الأخرى التي يمكن وضعها في تقابل مع هذه المجموعة. وإذا كانت المجموعة منتهية فإنه يمكن إقران هذه المجموعة بعدد صحيح موجب يمثل عدد عناصر هذه المجموعة.

انظر رئيسي ــ عدد رئيسي.

● **العدد الصحيح الجبري:**
انظر جبري ـ العدد الجبري.

● **عدد غاوس الصحيح:**
هو أي عدد عقدي a+bi حيث كل من a و b أعداداً صحيحة.

ويطلق عادة على عدد غاوس الصحيح **بالعدد الصحيح العقدي**.

● **مؤشر العدد الصحيح أو دالة φ للعدد الصحيح الموجب:**
انظر أويلر ـ دالة φ لأويلر.

NUMERICAL | **عددي**

● **تحليل عددي:**
هو العلم الذي يدرس طرائق الحصول على الحلول التقريبية للمسائل الرياضية.

● **معيّن عددي:**
هو المعين الذي تتكون جميع عناصره من أرقام وليس من أحرف.
انظر معين.

● **معادلة عددية:** هي معادلة ذات معاملات عددية وليس حرفية.
فالمعادلة $5x + 7 = -3$ هي معادلة عددية بينما $ax + b = c$ هي معادلة حرفية.

COUNTABLY | **عدياً**

● **متراص عديا:** انظر متراص.

COUNTABILITY | **عدية**

● **موضوعة العدية الأولى وموضوعة العدية الثانية:**
انظر أساس ـ أساس فضاء طوبولوجي.

TUPLE **عديد**

مجموعة من العناصر تلقب عناصرها بالعنصر الأول والعنصر الثاني والعنصر الثالث وهكذا.

انظر مرتب.

● **عديد من n:**

هو متجه عدد عناصره n ويكتب على الشكل $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

N-TUPLE **عديد من n**

انظر مرتب ـ زوج مرتب.

ARABIC **عربي**

● **أرقام عربية:**

وهي الأرقام 0,9,8,7,6,5,4,3,2,1 والتي دخلت أوروبا آتية من بلاد العرب.

يقول البعض أن أصل هذه الأرقام ربما كان هندياً، لذا يطلق عليها أيضاً اسم الأرقام الهندو ـ عربية.

WIDTH **عرض**

إن عرض مجموعة محدبة S في المستوى هو أكبر حد سفلي للأعداد ω بحيث تقع المجموعة بين مستقيمين متوازيين تفصل بينهما المسافة ω. وينطبق نفس هذا التعريف على مجموعة بعديتها n بعد وضع عبارة فومستويات متوازية بدلاً من مستقيمات متوازية. وهناك استعمال آخر لكلمة عرض. فإذا كانت $a<b<c$ أبعاد صندوق (متوازي مستطيلات) فنقول ان طول الصندوق يساوي c وعرض الصندوق b وارتفاع الصندوق يساوي a.

عروة LOOP

● **عروة في برنامج:**

هو برنامج جزئي يتكرر عدداً من المرات وفقاً لما يتطلبه البرنامج العام في الحاسب الالكتروني.

● **عروة منحنٍ:**

هي جزء من منحن مستو تحده مجموعة محدودة في المستوى.

انظر ذو العروتين.

عزم MOMENT

● **دالة مولدة للعزوم (إحصاء):**

الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ للمتغير العشوائي X (أو التوزيع x) هي $M(t) = E(e^{tx})$ على افتراض أن التوقع الرياضي $E(e^{tx})$ موجود في فترة $-h<t<h$ لأجل $h>0$. (انظر **متوقع ـ قيمة متوقعة**). إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً فإن $M(t) = \Sigma e^{tx} f(x)$ وإذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً فإن $M(t) = \int_{\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$. ومن الواضح أن $M(0) = 1$ لأي توزيع احتمالي.

على الرغم من أن الدالة المولدة للعزوم موجودة لكثير من التوزيعات الاحتمالية المعروفة ولكنها ليست موجودة لكل التوزيعات. فمثلاً ليس لتوزيع كوشي دالة مولدة للعزوم (أنظر كوشي ــ توزيع كوشي). وهذا يخالف **الدالة المميزة** $\phi(t) = E(e^{itx})$ التي تكون موجودة ومعرفة لجميع التوزيعات الاحتمالية. إذا كانت الدالة المولدة للعزوم $M(t)$ موجودة فإن:

$$\phi(t) = M(it),\ M(t) = \phi(\tfrac{t}{i})$$

انظر مميز ــ دالة مميزة.

ومن الممكن الاستفادة من $M(t)$ لاحتساب عزوم التوزيع. فإذا كان العزم من رتبة $E(X^k)$ موجوداً فإن $k = 1,2,3,\ldots$, $E(X^k) = \frac{d^k}{dt^k} M(t)_{t=0}$.

انظر **عزم التوزيع** أدناه.

وتكون الدالة المولدة للعزوم مفردة لكل توزيع إذ يتطابق التوزيعان إذا كان لهما نفس الدالة المولدة للعزوم.

إذا كان $X = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ متجهاً عشوائياً فإن دالته المولدة للعزوم (أو تسمى **الدالة المولدة للعزوم المشتركة** للمتغيرات العشوائية $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$، هي:

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_p) = E(e^{t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_px_p})$$

على افتراض أن التوقع الرياضي موجود لأجل $-h_i<t_i<h_i$ حيث $h_i>0$ و $i = 1,2,\ldots, p$ إذا كان العزم الجدائي (العزم المشترك) $E(x_1^{k_2} x_2^{k_2} \ldots x_p^{k_p})$ موجوداً، فإن:

$$E(x_1^{k_1}\ x_2^{k_2} \ldots x_p^{k_p}) = \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \ldots k_p}}{\partial t_1^{k}\ \partial t_2^{k} \ldots \partial t_p^{kp}} M(t_1, t_2, \ldots, t_p)]_{t_1 = t_2 = \ldots t_p = 0}$$

نعرّف **الدالة المولدة للعزوم العاملية** لمتغير عشوائي x بأنها $\psi(t) = E(t^x)$ على افتراض أن التوقع الرياضي $E(t^x)$ موجوداً في فترة تتضمن الواحد ومن الواضح أن $\psi(1) = 1$ وكذلك فإن $\psi(t) = M(\mathrm{Int})$ إذا كان العزم العاملي $E[x(x-1) \ldots (x-k+1)]$ من رتبة k موجوداً للمتغير العشوائي x، فإن:

$$E\ X(x - 1) \ldots (x - k + 1) = \frac{d^k}{dt^k} \psi(t)]_{t = 1}$$

انظر أدناه عزم التوزيع؛ كذلك انظر **متراكمات**.

● **طريقة العزوم** (إحصاء):

طريقة إحصائية لتقدير وسائط توزيع احتمالي معين. لتكن $x_1,x_2,\ldots,x_n$ عينة عشوائية مسحوبة من توزيع احتمالي (متقطع أو مستمر) $f(x;\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$ حيث $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ وسائط مجهولة نريد تقديرها. تتلخص طريقة العزوم بمساواة عزوم التوزيع $E(x^k)$ مع عزوم العينة $\frac{1}{n} \sum_{i=1} x_i^k$ لأجل $k = 1,2,\ldots,r$ وحل المعادلات الناتجة لصالح $\theta_1, \theta_2,\ldots, \theta_r$. ونأخذ عدداً كافياً من المعادلات لغاية الحصول على حل مفرد لصالح الوسطاء أي نجعل $E(x^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ لأجل $k = 1,2,\ldots$.

فمثلاً لتقدير المتوسط μ والتباين σ لتوزيع معين نجعل:

$$E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ E(x) = \frac{1}{n}\sum x_i$$

أي $\mu^2 + (\sigma^2) = \frac{1}{n}\sum x_i^2,\ \mu = \frac{1}{n}\sum x_i$ وبحل هاتين المعادلتين لصالح μ و σ نحصل على $\mu = \frac{1}{n}\ \Sigma x_i = \overline{X}$ و $\sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - (\overline{X}^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i - \overline{X})^2$.

انظر أدناه عزم التوزيع؛ وانظر عينة ــ عزم العينة.

● **عزم التوزيع:**

نعرف العزم من رتبة k حول قيمة ثابتة a لمتغير عشوائي X (أو لتوزيع X) بأنه $\mu_k = E(x - a)^k$ (لأجل $k = 1,2,...$) على افتراض أن التوقع الرياضي $E(x - a)^k$ موجود. (انظر **متوقع ــ قيمة متوقعة**). إذا أخذنا $a = 0$ فإن $\mu'_k = E(X^k)$ **هو العزم اللامركزي** من رتبة k للمتغير العشوائي x.

وإذا أخذنا $a = E(X) = \mu$ فإن $\mu_k = E(X - \mu)^k$ **هو العزم المركزي من رتبة** k للمتغير العشوائي X (أو التوزيع X). ويسمى العزم المركزي الثاني $\mu_2 = E(X - \mu)^2$ **تباين التوزيع** (أو تباين المتغير العشوائي X). ويمكن التعبير عن العزوم المركزية μ_k' بدلالة العزوم اللامركزية μ_k طبقاً للعلاقة التالية:

$$\mu_k = E(x - \mu)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu'_i(-\mu)^{k-i}$$

كما يمكن التعبير عن العزوم اللامركزية μ'_k بدلالة العزوم المركزية μ_k طبقاً للعلاقة التالية:

$$\mu'_k = E(X^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_i\ \mu^{k-i}$$

نعرف **العزم العاملي من رتبة** k لمتغير عشوائي X (أو لتوزيع X) بأنه $E[X(X - 1) \ldots (X-k+1)]$ على فرض أن هذا التوقع موجود.

انظر **مطلق ــ** عزم مطلق؛ وانظر **عينة ــ** عزم العينة.

● **عزم ثانٍ:**

انظر عزم ــ عزم العطالة.

● **عزم جدائي (إحصاء):**

إذا كان $\overline{X} = (X_1,X_2,...,X_p)$ متجه عشوائي فإن العزم الجدائي من رتبة

$(k_1,k_2,\dots,k_p)$ (حول قيم ثابتة $(a_1,a_2,\dots,a_p)$ للمتجه X (أو العزم المشترك للمتغيرات $(x_1,x_2,\dots,x_p)$، هو:

$$E[(X_1 - a_1)^{k_1}(X_2 - a_2)^{k_2}\dots(X_p - a_p)^{k_p}]$$

على افتراض وجود التوقع الرياضي، وإذا جعلنا $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$ فإن $E[X_1^{k_1}\ X_2^{k_2}\dots X_p^{k_p}]$ **هو العزم الجدائي اللامركزي من رتبة** $(k_1,k_2,\dots,k_p)$.

وبالنسبة لزوج من المتغيرات العشوائية X_i و X_j نعرف **التغاير** بأنه العزم الجدائي $E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$ ويساوي هذا $E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$.

● **عزم العطالة**:

عزم العطالة لجسيم حول نقطة أوخط أو مُسْتوٍ هو حاصل ضرب كتلة الجسيم في مربع بعدها عن النقطة أو الخط أو المستوى. وإذا كان هناك نظام من الجسيمات المادية وكان r_i بعد الجسيم ذي الكتلة m_i عن محور معين، فإن عزم عطالة هذا النظام حول المحور المعين هو $I = \sum_i m_ir_i^2$ ونعرف عزوم عطالة جسم مستمر كتلته m حول المحاور الديكارتية x و y و z على التوالي $I_x = \int_s (y^2 + z^2)dm$, $I_y = \int_s (x^2 + z^2)dm$ و $I_z = \int_s (x^2 + y^2)dm$ حيث تمتد المكاملة على كل الجسم. ونسمي كلاً من الكميات التالية **جداء العطالة**:

$$I_{xz} = \int_s xzdm,\ I_{yz} = \int_s yzdm,\ I_{xy} = \int_s xydm$$

إذا اخترنا المحاور الاحداثية x و y و z بشكل يجعل $I_{xz} = I_{yz} = I_{xy}$ فنسمي x و y و z **بالمحاور الأساسية للعطالة**.

انظر **متوازي** ـــ **مبرهنة المحور الموازي**.

● **عزم القوة**:

عزم القوة حول محور معين يساوي حاصل ضرب مسقط القوة على مستو عمود على المحور في طول المسافة العمودية الفاصلة بين المحور وخط تأثير القوة. أما عزم القوة $\overline{F}$ حول نقطة O فهو حاصل الضرب المتجهي $\overline{L} = \overline{r} + \overline{F}$ حيث $\overline{r}$ هو متجه الموضع بين O ونقطة تأثير القوة.

ويساوي مقدار عزم القوة $L = rF \sin\theta$ حيث θ هي مقدار الزاوية بين المتجهين $\overline{r}$ و $\overline{F}$.

ومن الناحية العددية، فإن مقدار عزم القوة يساوي مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\overline{r}$ و $\overline{F}$.

مرادف: عزم الفتل.

P
θ
F
L
F sin θ

● **عزم الكتلة:**

عزم الكتلة حول نقطة أو مستقيم أو مستوى يساوي مجموع حواصل ضرب كتل الجسيمات المكونة للكتلة في أبعاد هذه الكتل عن النقطة أو المستقيم أو المستوى. وبصورة أدق، فإن عزم الكتلة يساوي التكامل (مأخوذاً على كل الكتلة) **لعنصر عزم الكتلة** الذي يساوي حاصل ضرب الكتلة في بعده عن النقطة أو المستقيم أو المستوى. (انظر عنصر ـ عنصر المكاملة). ويجب أخذ الإشارة الجبرية (+ و −) للأبعاد بنظر الاعتبار عند احتساب عزم الكتلة.

وإذا كانت الكتلة مجموعة جسيمات على امتداد خط مستقيم (محور x مثلاً) فإن عزم هذه الكتلة حول نقطة a على المستقيم هو $\int(x - a)\rho(x)dx$ حيث تمثل $\rho(x)$ الكثافة (أي الكتلة لكل وحدة طول) عند النقطة x. كذلك يسمى المقدار $\int(x - a)\rho(x)dx$ **العزم الأول لتوزيع تكراري** دالته التكرارية تساوي $\rho(x)$. وإذا كانت الكتلة مجموعة في مستوى فإن عزم هذه الكتلة حول محور y هو $\int x\rho(x,y)dA$ وعزمها حول محور x هو $\int y\rho(x,y)dx$ حيث تمثل $\rho(x,y)$ الكثافة (أي الكتلة لكل وحدة مساحة) عند النقطة dA_1 وليمثل 1.1 عنصر المساحة. أما إذا كانت الكتلة مجموعة في الفضاء فإن عزمها حول مستوى (x,y) مثلاً هو $\int z\rho(x,y,z)dV$ حيث تمثل $\rho(x,y,z)$ الكثافة (أي الكتلة لكل وحدة حجم) عند النقطة (x,y,z) ويمثل dV عنصر الحجم. ونقصد **بعزم المنحنى** العزم المحسوب باعتبار أن للمنحنى وحدة كتلة لكل وحدة طول. كما نقصد **بعزم المساحة** العزم المحسوب باعتبار أن للمساحة وحدة كتلة لكل وحدة مساحة.

● **عزم كمية الحركة:**

انظر كمية الحركة.

● **مسألة العزوم:**

مسألة طرحت من قبل ستيلتجس (توماس جان) حوالي عام 1894، وهي: إذا كانت $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots\}$ متتالية فمن الأعداد الحقيقية، فإن:

المطلوب هو إيجاد دالة متزايدة برتابة α تحقق المساواة $\int_0^\infty t^n d\alpha(t) = \mu_n$ لأجل كل $n = 0,1,2,\ldots$ (انظر ستيلتجس ــ تكامل ريمان وستيلتجس). وقد حلت مثل هذه المسألة من قبل تشيبيشيف حوالي عام 1873. وبصورة عامة تتعلق مسألة العزوم بإيجاد الشروط اللازمة والكافية على المتتالية $\{\mu_0, \mu_1, \ldots\}$، لكي توجد دالة α من نمط معين تحقق المساواة $\int_E t^n d\alpha(t) = \mu_n$ لأجل $n = 0,1,2,\ldots$ حيث E مجموعة معينة. أمثلة: إذا كانت E هي الفترة المغلقة $[0,1]$ وكانت α متزايدة برتابة فإن محدودية المتتالية $\{|\mu_n|\}$ شرط لازم لوجود α، وأن $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \mu_{k+n} > 0$ لأجل كل m و n شرط لازم وكاف لوجود α. أما إذا كانت مجموعة الأعداد الحقيقية وكانت E متزايدة برتابة فإن الشرط اللازم والكافي لوجود α هو $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu_i \geq 0$ ما دامت الثوابت $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \alpha_n\}$ تحقق $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i \geq 0$ لأجل كل t.

عزم الانحناء — BENDING MOMENT

انظر عزم.

عزم الفتل — TORQUE

انظر عزم ــ عزم القوة.

هي مشاهدة تختلف قيمتها اختلافاً كبيراً وغير متوقعٍ عن قيم معظم المشاهدات الأخرى في تجربة إحصائية معينة. ومن أسباب وجود المشاهدات العزيلة نذكر ثلاثة:

(1) خطأ ينشأ من قراءة غير صحيحة لجهاز معين أو خطأ في التدوين أو خطأ في العمليات الحسابية التي تجري أحياناً على المشاهدات قبل تحليلها. ولمعالجة هذه الحالة يمكن أن نهمل المشاهدات العزيلة تماماً وكأنها لم تكن ثم نجري التحليل الإحصائي على بقية المشاهدات، أو يمكن أن نعيد التجربة فقط في الحالات التي نتجت عن مشاهدات عزيلة.

(2) أخطاء في الافتراضات والنماذج النظرية للتجربة، وتعالج هذه الحالات بتحوير النماذج النظرية.

(3) عدم وجود أخطاء وإنما من طبيعة الظاهرة قيد الدراسة ظهور قيم نادرة منحرفة عن بقية القيم. وتعالج هذه الحالة بمعاملة المشاهدات العزيلة كأي مشاهدات أخرى وإدخالها في التحليل الإحصائي.

عسلوج

ليكن M منطوياً تفاضلياً و TM رزمة مماسة إذا كان α عدداً حقيقياً لا يساوي صفراً، فإننا نعرف دالة $f:TM \to TM$ بواسطة $f(v) = \alpha v$ ولتكن الدالة $f_*:T(TM) \to T(TM)$ هي تفاضل f ويعرف العسلوج على M بأنه كل حقل متجهات ζ على TM بحيث:

(1) $\zeta(\alpha v) = \alpha f_*(\zeta v)$ وذلك لكل $\alpha \neq 0$ وكل $V \in TM$.

(2) إذا كانت $\Pi:TM \to M$ هي دالة الإسقاط وكان $\Pi_*:T(TM) \to TM$ هو تفاضلها فإن $\Pi_*(\zeta v) = v$.

DECAGON **عشاري**

العشاري هو مضلع له عشرة أضلاع. إذا كان هذا المضلع نظامياً فإننا نسميه **العشاري النظامي**.

TEN **عشرة**

● **منزلة العشرات**:

هي المحل النسبي في كتابة العدد الذي يعطي قيمة عشر وحدات. مثلاً في العدد 324 نجد أن 2 في منزلة العشرات وتعتبر مساوية 20 = 10 × 2 وحدة.

VIGESIMAL **عشروني**

يتعلق بالعدد عشرين 20. إن نظام الأعداد العشريني هو نظام لكتابة الأعداد الحقيقية باستخدام الأساس 20، وقد استخدم هذا النظام في حضارتي المايا والأزتكس.

انظر أساس ـ أساس نظام الأعداد.

ICOSAHEDRON **عشروني الوجوه**

هو كثير وجوه يحتوي على عشرين وجهاً، ويعرف **عشروني الوجوه النظامي** بأنه عشروني وجوه تكون زواياه (ذات الوجوه الكثيرة) متطابقة ووجوهه من مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة.

انظر كثير وجوه.

DECIMAL **عَشري**

منسوب إلى نظام الأعداد العشري. انظر أدناه.

● **دقيق إلى مرتبة عشرية معينة**:

انظر دقيق.

● **كسر عشري:**

عدد أقل من الواحد مكتوب بالنظام العشري ويتميز بوجود صفر فقط إلى يسار الفاصلة العشرية مثل 0.235.

● **جمع وضرب الأعداد العشرية:**

انظر جمع وجداء.

● **قياس عشري:**

نظام للقياس كل وحداته هو وحدة معيارية مضروبة في قوى العشرة أو مقسومة على قوى العشرة.

● **كسر عشري مختلط:**

يتكون من عدد صحيح يكتب إلى يسار الفاصلة العشرية (.) وكسر عشري.

مثال: 2.325 وإذا تساوى عدد المنازل العشرية في عددين، فنسميهما متشابهين. مثال: الأعداد العشرية 2.325 و 0.325 و 0.350 أعداد متشابهة لاحتواء كل منها على ثلاث منازل عشرية.

● **عدد عشري:**

عدد معين مكتوب بنظام الأعداد العشري.

● **كسر عشري مكافىء لكسر اعتيادي:**

هو كسر عشري يساوي الكسر الاعتيادي. مثلاً الكسر العشري 0.0625 يكافيء الكسر الاعتيادي $\frac{1}{16}$.

● **نشر عشري:**

هو كتابة العدد الحقيقي بالنظام العشري.

● **نظام الأعداد العشري:**

نظام لكتابة الأعداد الحقيقية باستخدام الأساس 10، (انظر أساس ــ أساس نظام الأعداد). وهذا هو النظام الشائع الذي نكتب فيه أي عدد حقيقي باستخدام الفاصلة العشرية (.). وترتيب معين من الأرقام 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

مثلاً، 102.35. ونقسم الأعداد العشرية إلى نوعين: أولاً ــ **عدد عشري منته** حيث يحتوي على عدد منته من المنازل العشرية (إلى يمين الفاصلة العشرية) مثل 1.25. ثانياً ــ **عدد عشري لا منته** حيث يحتوي عى عدد غير منته من المنازل العشرية (إلى يمين الفاصلة العشرية) مثل $\frac{1}{3} = 0.3333...$ أو مثل أساس اللوغاريتم الطبيعي $e = 2.71828182845904$ وإذا أردنا كتابة كل الأعداد الحقيقية بالنظام العشري فمن الضروري استخدام الأعداد العشرية غير المنتهية. ومن وجهة أخرى، نقسم الأعداد العشرية إلى نوعين. أولاً ــ **عدد عشري متكرر** وهو عدد عشري منته أو غير منته، ولكنه يتألف من تكرار مجموعة منتهية من المنازل العشرية تتكرر بصورة لا منتهية. مثال $\frac{5}{6} = 0.8333...$ حيث نجد أن القطاع 3 يتكرر بصورة لا منتهية. والعدد $15/28 = 0.53571428571428...$ هو عدد عشري متكرر حيث نجد أن القطاع 571428 يتكرر بصورة لا نهائية. كذلك فإن العدد $\frac{1}{8} = 0.125$ هو عدد عشري متكرر لأنه عشري منته. وثانياً: **عدد عشري غير متكرر** وهو عدد عشري لا يمكن إيجاد أي قطاع متكرر فيه مثل العدد المذكور سابقاً. ومن المبرهنات المهمة هي أن العدد العشري يكون متكرراً إذا وفقط إذا كان عدداً منطقاً. ويكون العدد العشري غير متكرر إذا وفقط إذا كان عدداً أصم.

انظر ليوفيل ــ عدد **ليوفيل**؛ وانظر عدد معتدل.

● **منزلة عشرية:**

هي موضع الرقم على يمين الفاصلة العشرية. ففي العدد 543.2165 نقول إن الرقم 2 واقع في **المنزلة العشرية الأولى** والرقم 1 واقع في المنزلة العشرية الثانية والرقم 6 واقع في المنزلة العشرية الثالثة. وهكذا. أما الرقم 3 فيقع في **منزلة الآحاد** ويقع الرقم 4 في منزلة العشرات والرقم 5 في منزلة المئات.

● **فاصلة عشرية:**

هي علامة النقطة (.) تستخدم في كتابة العدد العشري لفصل المنازل العشرية عن العدد الصحيح في ذلك العدد.

● **نظام عشري:**

(1) نظام الأعداد العشري.

(2) أي نظام للقياس يستخدم للقياس العشري. مثال: النظام المتري.

● **فاصلة عشرية عائمة:**

انظر عائم.

عشوائي RANDOM

● **تجربة عشوائية:**

انظر احتمال، وانظر تجربة.

● **جدول أعداد عشوائية:**

جدول يبين متتاليات من الأعداد العشوائية ويستخدم اعتيادياً لسحب العينات العشوائية.

انظر أعلاه عينة عشوائية؛ وانظر متتالية أعداد عشوائية.

● **سير عشوائي:**

لتكن $\{X_n\}$ لأجل $n=1,2,...$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتطابقة التوزيع الاحتمالي. **السير العشوائي** هو المتتالية $\{S_n\}$ حيث $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ هي المجاميع الجزئية لأجل $n = 0,1,2,...$ وحيث نأخذ $S_0 = 0$ اتفاقاً. ويمثل السير العشوائي نموذجاً مهمًا في التطبيقات الفيزيائية.

مثال: جسيم يتحرك على محور بشكل خطوة (في الاتجاه الموجب باحتمال x أو في الاتجاه السالب باحتمال $^1/_2$) طولها h في r من وحدات الزمن. إن احتمال كون الجسم على بعد x من موقعه الأصلي عند الزمن $t=0$ هو الدالة $u(x,t)$ التي تحقق معادلة الفروق:

$$u(x,t+r) = {}^1/_2 u(x+h, t) + {}^1/_2 u(x-h, t)$$

● **عينة عشوائية بسيطة:**

ليكن X متغيراً عشوائياً يمثل صفة قيد الدراسة في مجتمع إحصائي معين وليكن $f(x)$ هو التوزيع الاحتمالي للمتغير X. لنسحب عينة (انظر عينة) حجمها $n\geq1$ بطريقة ما من هذا المجتمع أي أجرينا $n\geq1$ من القياسات على

هذا المجتمع، ولنرمز لهذه العينة بالمتجه $(X_1', X_2', \ldots, X_n')$. ولنسحب عينة ثانية $(X_1'', X_2'', \ldots, X_n'')$ حجمها n أيضاً، وهكذا... نعتبر هذه العينات متجهات مشاهدة لقيم المتجه العشوائي $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

● **المعاينة العشوائية البسيطة:**

هي طريقة لسحب العينات بحيث تجعل احتمالات السحب متساوية لكل العينات الممكنة. والعينة المسحوبة بمثل هذه الطريقة تسمى **عينة عشوائية بسيطة**. إذا كان المجتمع لامنتهياً أو كان منتهياً والمعاينة تجري بالاستبدال فهذا يعني أن عناصر المتجه العشوائي $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ تكـون مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي $f(x)$. أي أن

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

إذا كان N هو حجم المجتمع فإن $1/(N)^n$ هو احتمال سحب العينـة العشوائية البسيطة. أما إذا كان المجتمع منتهياً حجمه N والمعاينة تجري بدون استبدال فإن عناصر العينة العشوائية البسيطة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ سوف لا تكون مستقلة وإن احتمال سحب العنصر يتغير من سحبة إلى سحبة فيكون $\frac{n}{N}$ في السحبة الأولى و $\frac{n-1}{N-1}$ في السحبة الثانية وهكذا. أما احتمال سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها n بدون إرجاع من مجتمع منته حجمه N فهو $1/\binom{N}{n}$. وإذا كان n صغيراً كفاية بالنسبة إلى N فإن المعاينة بدون إرجاع تنطبق تقريباً على المعاينة بدون إرجاع.

انظر استبدال ودون استبدال.

● **عينة عشوائية مطبقة:**

في طريقة **المعاينة العشوائية المطبقة** نقسم المجتمع الاحصائي ذي الحجم N إلى $K(k>1)$ من المجتمعات الجزئية تسمى طبقات. ولتكن $N_1, N_2, \ldots, N_k$ حجوم هذه الطبقات حيث $\sum_{i=1}^{k} N_i = N$. نسحب عينة عشوائية بسيطة بصورة مستقلة من كل طبقة فيكون لدينا K من العينات العشوائية البسيطة. إن العينة المتكونة من كل هذه العينات العشوائية البسيطة تسمى **عينة عشوائية مطبقة**. تستخدم المعاينة العشوائية المطبقة لزيادة الكفاءة في التقدير وهي أكفأ بصورة

عامة من المعاينة العشوائية البسيطة. وإذا كان μ هو وسط المجتمع الاحصائي فـإن مقـدرة غـير المتحيـز والمحسـوب من العينـة العشـوائيـة المـطبقـة هو $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{N_i}{N} \overline{X}_i$ حيث $\overline{X}_i$ هو وسط العينة العشوائية البسيطة المسحوبة من الطبقة i.

● **قوالب معشوأة:**

انظر قالب.

● **متتالية عشوائية:**

متتالية من الأعداد لا يوجد لها نظام أو نمط معين. إن **متتالية الأعداد العشوائية** هي متتالية نختـار عناصـرها بصـورة مستقلة من أحد الأعـداد 0,1,2,...,9 بحيث أن احتمال اختيار أحد هذه الأعداد يساوي $\frac{1}{10}$ تنظم هذه المتتالية في جدول خاص يسمى جدول الأعداد العشوائية. وأحد استخدامات الأعداد العشوائية هو لسحب عينات عشوائية كما يلي: لنفرض أننا أردنا سحب عينة عشوائية حجمها n=10 من مجتمع إحصائي حجمه N=120. نرقّم وحدات المجتمع بالأرقام التسلسلية 000,001,002,...,119 نفتح جدول الأعداد العشوائية ونبدأ فيه ببداية عشوائية (بطريقة ما) ثم نقـرأ بصورة منتظمة (حسب ترتيب الجدول العشوائي) متتاليان من 3 مراتب من الأعداد العشوائية إلى أن نصل إلى المتتالية العاشرة مع إهمال أي متتالية تشكل رقمًا أكبر من 119 وسحب واحدة أخرى بدلها وكذلك إهمال أي متتالية متكررة (إذا كان المراد معاينة بدون استبدال). إن المتتاليات العشـر المسحوبة بهذه الصورة هي أرقام وحدات المجتمع التي تنتمي للعينة العشوائية البسيطة.

● **متجه عشوائي:**

ليكن (Ω,β,P_Ω) فضاء احتمالياً معطى حيث Ω هو فضاء العينة و β حقل بوريل معرف على Ω و P_Ω قياس احتمالي.

انظر احتمال ـ فضاء احتمالي.

إن التطبيق $\vec{X}$ من Ω إلى الفضاء الاقليدي R_k ذي البعدية K (أي $\vec{X}:\Omega\rightarrow R_k$) يسمى **متجهاً عشوائياً** بعديته k إذا كان $\vec{X}^{-1}(E)\epsilon\beta$ لأجل كل $E\subseteq R^k$

(أي أن $\vec{X}$ قابل للقياس) حيث E هي مجموعة جزئية ذات بعدية K وتنتمي إلى حقل بوريل المعرف على K. نعرف **دالة التوزيع المتعدد (أو دالة التوزيع المشترك)** للمتجه العشوائي $X=(X_1,X_2,\ldots,X_k)$ بأنها

$$F(t_1,t_2,\ldots,t_k) = Pr(X_1 \le t_1, X_2 \le t_2, \ldots, X_k \le t_k)$$
$$= P_\Omega(\vec{X}^{-1}(E_{t_1t_2\ldots t_k})$$

حيث $E_{t_1t_2\ldots t_k} = [-\infty,t_1].[-\infty,t_2]\ldots[-\infty,t_k]$ هي الجداء الديكارتي.

انظر متغير عشوائي أدناه.

وتفيد المتجهات العشوائية في دراسة عدة ظواهر في آن واحد مثل الطول والوزن والعمر لمجموعة من البشر.

انظر **توزيع**: دالة التوزيع؛ وانظر فوهندسي؛ وانظر **كثير الحدود**: توزيع كثير الحدود.

● **متغير عشوائي**:

ليكن (Ω,β,P_Ω) فضاء احتمالياً معطى حيث ان Ω هو فضاء العينة لتجربة عشوائية معينة و β حقل بوريل معرف على Ω و P_Ω قياس احتمالي معرف على β. انظر **احتمال ــ فضاء احتمالي**.

إن المتغير العشوائي X هو تطبيق قابل للقياس من فضاء العينة Ω إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R. أي أن $X:\Omega\rightarrow R$ بشرط أن يكون X قابلاً للقياس بمعنى أنه يحقق الشرط $X^{-1}(E)\epsilon\beta$ لأجل كل E تنتمي إلى حقل بوريل المعرف على R. ونعرّف لكل متغير عشوائي X دالة F(t) تسمى دالة التوزيع (أو دالة التوزيع التراكمي). إذا كانت F(t) مستمرة إطلاقاً فنسمي X **متغيراً عشوائياً مستمراً**، وحينذاك توجد دالة f(x) **(دالة الكثافة الاحتمالية)** تحقق $F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ و $dF(t)/dt=f(t)$ في كل مكان تقريباً. أما إذا لم تكن مستمرة فنسمي X **متغيراً عشوائياً متقطعاً** ونعرف له **دالة الكتلة الاحتمالية** F(t) بـ $p(x)=F(x)-\lim_{t\rightarrow\bar{x}} F(t)$. إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً فإن $Pr(X=x)=0$ لأي قيمة كانت X.

انظر **احتمال**: دالة الكثافة الاحتمالية.

عصب NERVE

● **عصب عائلة مجموعات:**

لتكن $\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$ هي عائلة منتهية من المجموعات. ولنـرفق بكل مجموعة S_k الرمز p_k. ونعرّف عصب هذه العائلة بأنه **المعقد المبسطي المجرد** الذي رؤوسه هي الرموز $p_0, p_1, \ldots, p_n$ ومبّسطاته المجردة هي جميع المجموعات الجزئية $p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_r}$ التي تقابل مجموعات متقاطعة (أي التقاطع لا يكـون المجموعة الخالية).

مثال: إذا كانت S_0, S_1, S_2, S_3 هي الوجوه الأربعة لرباعي وجوه، فإن عصب هذه العائلة هـو المعقد المبسـطي المجرد الـذي رؤوسه p_0, p_1, p_2, p_3 ومبسطاته المجردة هي جميع المجموعات المكونة من ثلاثة رؤوس أو أقل، ويمكن تخيله هندسياً على أنه رباعي وجوه.

عضو MEMBER

● **عضو مجموعة (أو عنصر مجموعة):**

هو صفة ذاتية لكائن تحدد انتماءه لمجموعة.

وهكذا نكتب $x \in S$ لنعني أن X هو عضو في المجموعة S أو هو عنصر من المجموعة S. بينما نكتب $x \notin S$ لنعني أن x ليس عنصراً (عضواً) من S.

عطالة INERTIA

● **عزم العطالة والمحاور الرئيسية للعطالة وجداءات العطالة:**

انظر عزم ـ عزم العطالة.

● **عطالة الجسم:**

هي مقاومته للتغير من حالته في السكون أو في الحركة. وبعبارة أخرى فإن **عطالة الجسم** هي خاصيته والتي تجعل من الضروري تطبيق قوة ما على

الجسم لاعطائه تسارعاً معيناً. وتعتبر **العطالة** مرادفة للكلمة الأكثر شيوعاً «الكتلة».

● **قانون العطالة:**

هو قانون في علم الميكانيك ينص على أن الأجسام تبقى على حالتها من حيث السكون أو الحركة بسرعة منتظمة في خط مستقيم ما لم تؤثر عليها قوى خارجية. وقد اكتشف هذا القانون العالم غاليليو في سنة 1638 وضمنه العلامة اسحق نيوتن كأحد مصادرات علم الميكانيك في كتابه «المبادىء» الذي نشر سنة 1867.

ويعرف هذا القانون عادة **بقانون الحركة الأول لنيوتن**.

INERTIAL **عطالي**

● **نظام الاحداثيات العطالي:**

انظر إحداثي.

CONJUNCTION **عطف**

● **عطف القضايا:**

هو ربط قضيتين ببعضهما بحرف العطف «و» لنحصل على قضية جديدة مثلاً لتكن القضية الأولى هي «إسمي خالد» والقضية الثانية «السماء تمطر» فإن عطف هاتين القضيتين هو القضية «اسمي خالد والسماء تمطر». إذا كانت P القضية الأولى و Q القضية الثانية فإننا نرمز لعطف Q,P بالرمز $P \wedge Q$ أو بالرمز P.Q تكون القضية $P \wedge Q$ صائبة إذا وفقط إذا كانت كل من P و Q قضية صائبة. انظر فصل.

CONJUNCTIVE **عطفي**

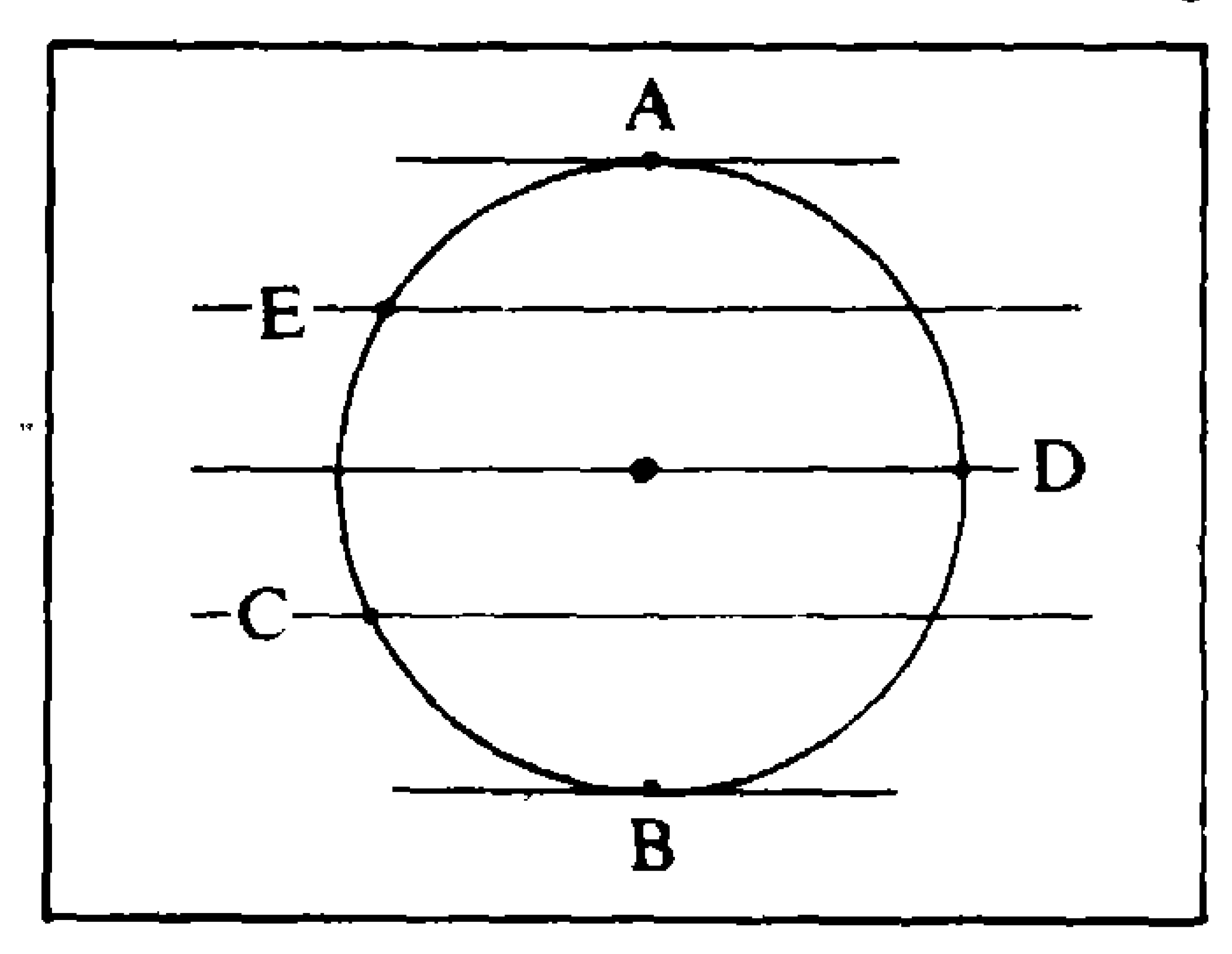
● **تحويل عطفي:**

انظر **تحويل ــ تحويل عطفي**.

عَطْفية

● مبدأ العطفية:

إذا كانت ,A,B,C,D,E نقاطاً متسامتة في المستوى الاسقاطي الحقيقي وكان AB//CD و AB//BE فلا بد أن يكون AB//DE.



انظر يفصل؛ انظر ترتيب النقاط في الرسم.

وعلى سبيل الايضاح نذكر أن AB//CD وهذا يعني أننا لا نستطيع المرور من A إلى B بدون المرور في C أو في D.

عطية، ميخائيل فرنسيس — ATIYAH, MICHAEL FRANCIS (1929-)

هو رياضي بريطاني معاصر ومن أصل عربي، حاصل على وسام عام 1966. له أبحاث قيمة عدة في حقول: نظرية K، نظرية الأدلة، نظرية النقطة الثابتة، والهندسة الجبرية ونظرية التحادد.

عَقْد — DECADE

(1) تقسيم إلى عشرات أو تجميع في عشرات.

مثلاً: الأعداد من 1 إلى 10 (بما فيها 1 أو 10) تشكل عقداً وكذلك الأعداد من 11 إلى 20 وهكذا.

(2) عشر سنوات.

عقدة — KNOT

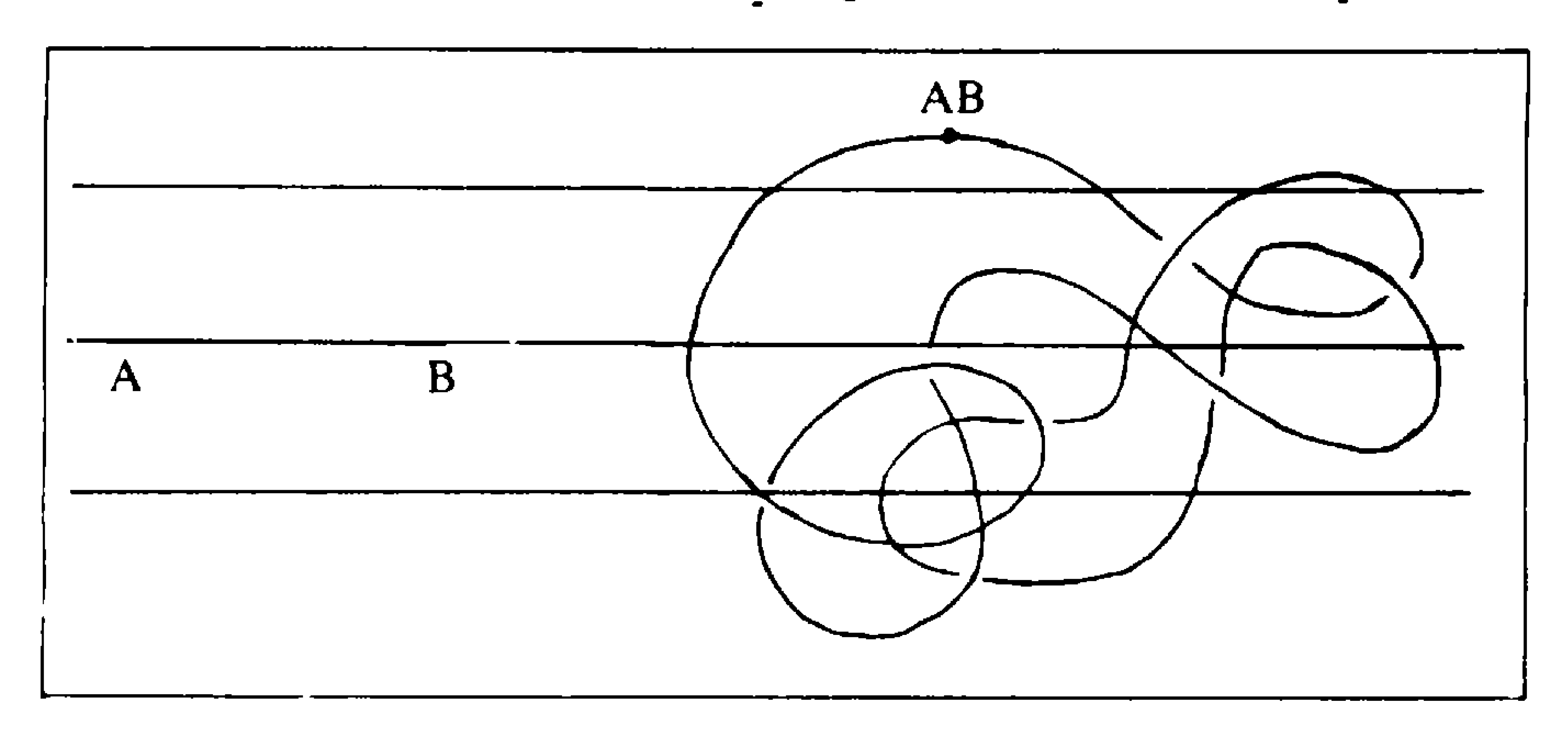
● عقدة:

هي وحدة سرعة وتساوي ميلاً بحرياً في الساعة. وهكذا فقولنا تبحر

الباخرة بسرعة 30 عقدة يعني أن سرعة هذه الباخرة هي 30 ميلاً بحرياً في الساعة.

● **عقدة في الطوبولوجيا:**

هي المنحنى الفضائي الذي يتم تشكيله من سلك AB عندما نحبكه ونعقده بأي طريقة بحيث ينطبق لحرفاه في النهاية.



إن أي عقدتين متكافئتان طوبولوجياً إلا أنه لا يمكن الانتقال من إحداهما للأخرى بتشويه مستمر دون أن نقطع السلك. وبشكل رياضي نعرف **العقدة** بأنها مجموعة نقط في الفضاء متكافئة طوبولوجياً مع الدائرة.

أما **نظرية العقد** فتتعلق بالتحليل الرياضي لأنواع العقد الممكنة، وبدراسة الطرائق التي تمكننا من معرفة العقدة التي يمكن أن تنتقل إلى عقدة أخرى بتشويه مستمر.

NODE **عقدة**

● **عقدة منحنٍ:**

هي نقطة يتقاطع عندها جزآن من منحن Γ حيث يكون لهذا المنحنى عند تلك النقطة مماسان مختلفان. أما مجموعة العقد لمنحنيات تنتمي إلى نفس العائلة فتسمى المحل الهندسي للعقد.

انظر مفرق؛ وانظر مميز معادلة تفاضلية.

عقدة انثناء FLECNODE

هي عقدة وهي أيضاً نقطة انعطاف على أحد فروع المنحنى التي تمس بعضها عند العقدة.

عقدي NODAL

● **خط عقدي:**

هو خط يبقى ثابتاً في تشكيل ما عندما يدور هذا التشكيل أو يتشوه بطريقة معينة.

انظر أويلر ــ زوايا أويلر.

عقدي COMPLEX

● **حقل أو مجال عقدي:**

هو مجموعة الأعداد العقدية.

انظر حقل.

● **جذر عدد عقدي:**

انظر جذر.

● **جذور عقدية لمعادلة من الدرجة الثانية:**

هي جذور للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ من الشكل $a + bi$ وذلك لتمييزها عن الجذور الحقيقية، أي عن الحالة الخاصة التي يكون فيها $b = 0$.

انظر مميز ــ مميز معادلة ثنائية الدرجة بمتغير واحد.

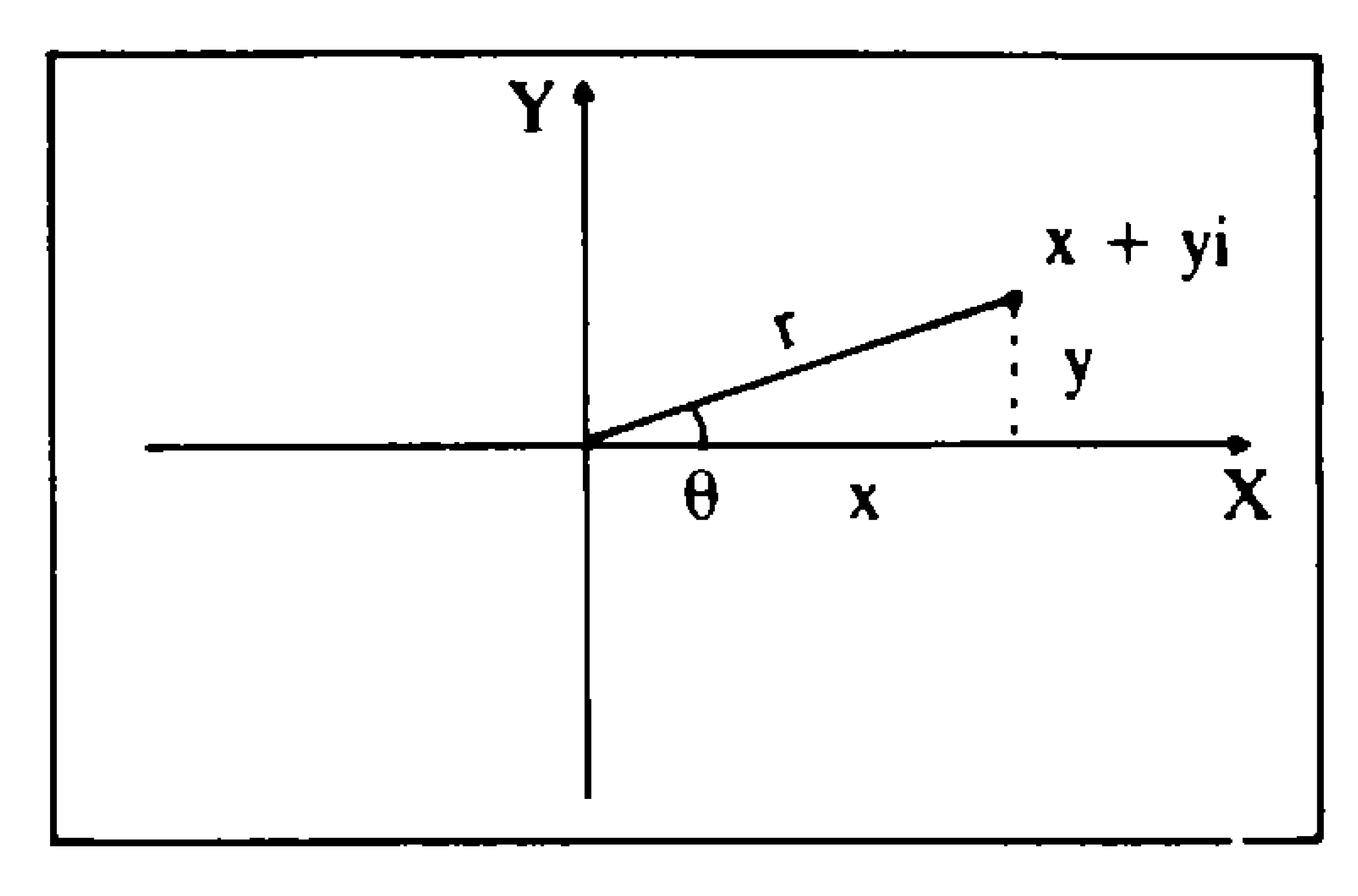
● **سعة أو عمدة عدد عقدي:**

انظر قطبي ــ شكل قطبي لعدد عقدي.

● **عدد عقدي:**

العدد العقدي هو عدد من الشكل $a + bi$ حيث أن a,b عددان حقيقيان

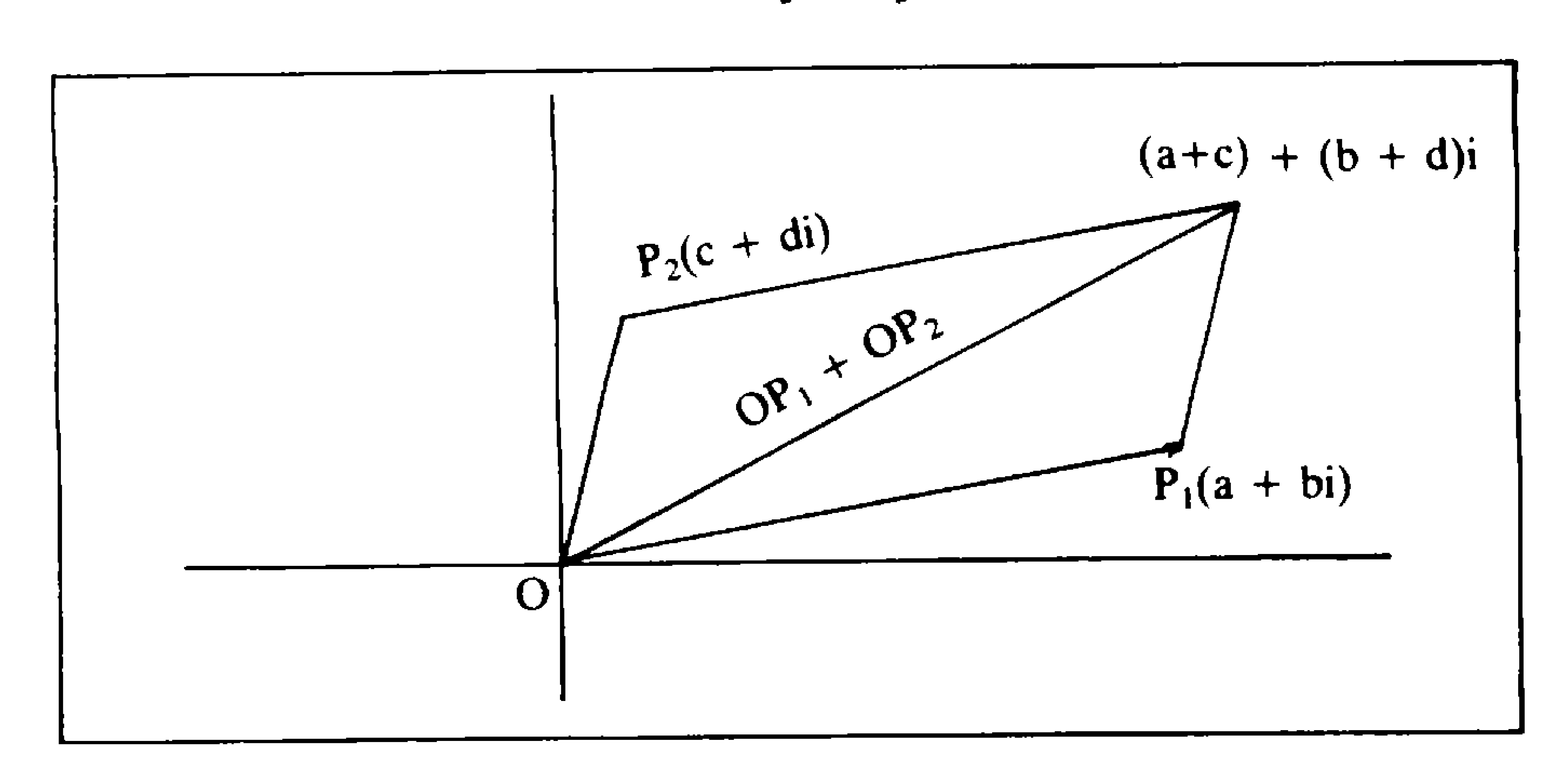
و $i^2 = -1$ إذا كان $b \neq 0$ فإننا نقول ان العدد $a + bi$ **تخيلي**. ونقول انه **تخيلي بحت** إذا كان $a = 0, b \neq 0$ يكون العددان العقديان $a + bi, c + di$ متساويين إذا وفقط إذا كان $b = d, a = c$.



إذا أخذنا أي عدد عقدي $x + yi$ فإننا نستطيع أن نمثله بواسطة متجه في المستوى مركبتيه x,y أو نمثله بواسطة نقطة (x,y).

انظر الشكل؛ وانظر آرغند ـ رسم آرغند التخطيطي.

نستنتج من ذلك أن العددين العقديين يكونان متساويين إذا وفقط إذا تمثلا بواسطة نفس المتجه أونفس النقطة. نرى من الشكل أن $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ وهكذا يكون $x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ وهذا يسمى **الشكل القطبي للعدد العقدي** $x + iy$. (انظر قطبي). نجمع عددين عقديين عن طريق جمع الأجزاء الحقيقية ثم معاملات i كل حد على حدة، أي أن **مجموع** $a + bi$ و $c + di$ هو العدد العقدي $(a + c) + (b + d)i$ مثلاً: مجموع $2 + 3i$ و $7 + 8i$ هو $9 + 11i$. ومن الناحية الهندسية فإن جمع الأعداد العقدية مثل جمع المتجهات في المستوى ويكون مجموع العددين العقديين الممثلين بالمتجهين OP_2, OP_1 العدد العقدي الذي يمثله $OP_1 + OP_2$.



نحسب حاصل ضرب عددين عقديين بأن نعاملهما معاملة كثيرات الحدود مع استعمال الخاصة $i^2 = -1$ لذا

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2$$
$$= ac - bd + (ad + bd)i$$

إذا كان العددان العقديان من الشكل:

$$r_1(\cos A + i \sin A), r_2(\cos B + i \sin B)$$

فإن حاصل ضربهما يكون $r_1r_2[\cos (A + B) + i \sin (A + B)]$، أي أننا إذا أردنا أن نضرب عددين عقديين علينا أن نضرب قيمهما المطلقة وأن نجمع عمدتيهما. (انظر **دوموافر ــ مبرهنة دوموافر**). وبشكل مشابه نحصل على:

$$r_1(\cos A + i \sin A) \div r_2(\cos B + i \sin B) =$$
$$\frac{r_1}{r_2}[\cos (A - B) + i \sin (A - B)]$$

إذا لم يكن العددان في شكلهما القطبي فإننا نقسم عن طريق ضرب كل من القاسم والمقسوم بمرافق القاسم. مثلاً:

$$\frac{2 + i}{1 + i} = \frac{(2 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 - i}{2}$$

كما أننا نستطيع تعريف نظام الأعداد العقدية على أنه مجموعة من الأزواج المرتبة (a,b) حيث a,b عددان حقيقيان وبحيث نعرف الجمع والضرب عليها كما يلي:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

ويحقق هذا النظام معظم قوانين الجبر الأساسية كالتبديلية والتجميعية للجمع والضرب. ويشكل هذا النظام حقلاً ولكنه حقل غير مرتب.

ينتج عن هذه التعريفات أن
$(0,1)(0,1) = (-1,0), (0,-1)(0,-1) = (-1,0)$، أي أن العدد $(-1,0)$ أو -1 له جذران تربيعيان هما: $(0,1), (0,-1)$.

انظر أساسي ـ مبرهنة الجبر الأساسية.

- **عدد وحدة عقدي:**

هو عدد عقدي قيمته المطلقة 1 أو هو عدد عقدي من الشكل $\cos\theta + i\sin\theta$ تمثل أعداد الوحدة بنقاط على دائرة نصف قطرها 1 في المستوى. إذا كان z_2, z_1 عددي وحدة فإن $z_1 z_2$، $\frac{z_1}{z_2}$ يكونان عددي وحدة أيضاً.

- **عددان عقديان مترافقان:**

هما عددان من الشكل $a + bi, a - bi$، حيث ان a, b عددان حقيقيان.

ونرمز لمرافق العدد العقدي z بالرمز $\bar{z}$، وبذلك يكون:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, z\bar{z} = x^2 + y^2$$

وذلك إذا كان $z = x + iy$.

إذا كان z جذراً لمعادلة كثير الحدود فإن $\bar{z}$ أيضاً يكون جذراً لهذه المعادلة.

- **كسر عقدي:**

انظر كسر.

- **كرة عقدية:**

هي كرة نصف قطرها 1 ويمثل عليها المستوى العقدي عن طريق الإسقاط المجسادي. ويكون المستوى العقدي عادة إما مارًا بخط الاستواء بالنسبة لقطب الإسقاط وإما أنه المستوى المماس للكرة عند النقطة المقابلة قطرياً لقطب الإسقاط.

- **القسم الحقيقي والقسم التخيلي لعدد عقدي:**

انظر حقيقي ـ تخيلي.

- **قياس عقدي:**

انظر قياس ـ قياس مجموعة.

- **قيمة مطلقة لعدد عقدي:**

انظر قياسي.

● **مرافق عقدي لمصفوفة:**

انظر **مصفوفة** ـ مرافق عقدي لمصفوفة.

● **مستوى عقدي:**

هو مستوى الأعداد العقدية زائد نقطة عند اللانهاية. وتكون جوارات هذه النقطة هي خوارج الدوائر المتمركزة عند 0. من الناحية الطوبولوجية فإن المستوى العقدي يكافىء الكرة.

انظر **إسقاط** ـ إسقاط مجسادي.

● **مكاملة عقدية:**

انظر **كفاف** ـ تكامل كفاف.

عكس — **CONVERSE**

● **عكس مبرهنة (أو اقتضاء):**

هو مبرهنة (أو اقتضاء) ينتج عن طريق استبدال الفرض بالنتيجة والنتيجة بالفرض. مثلاً عكس القضية: «إذا كان x ينقسم على 4 فهو ينقسم على 2» هو القضية الخاطئة «إذا كان x ينقسم على 2 فهو ينقسم على 4» إذا كان الاقتضاء صائباً فإن عكسه قد يكون صائباً وقد لا يكون. إذا كان كل من الاقتضاءين $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ صائباً فإن التكافؤ $p \leftrightarrow q$ يكون صائباً.

انظر **معكوس** ـ معكوس اقتضاء.

عكس — **REVERSE**

نقول إن مجموعة خطوات حسابية مأخوذة بترتيب عكسي إذا أخذنا الخطوة الأخيرة أولاً وقبل الأخيرة ثانياً وهكذا. وتوضع المتتالية المنتهية بترتيب عكسي إذا وضعنا الحد الأخير أولاً وقبل الأخير ثانياً وهكذا.

عكس عقارب الساعة — **COUNTERCLOCKWISE**

اتجاه دوران مخالف للاتجاه الذي يدور فيه عقرب الساعة على القرص.

ANTITRIGONOMETRIC عكس مثلثي

● **دالة مثلثية معاكسة:**

هي دالة معاكسة لإحدى الدوال المثلثية مثل:

$\csc^{-1}x, \tan^{-1}x, \sin^{-1}x, \cos^{-1}x$

انظر **قوس جيب، قوس جيب تمام، قوس ظل، قوس قاطع.**

INVERSELY عكسياً

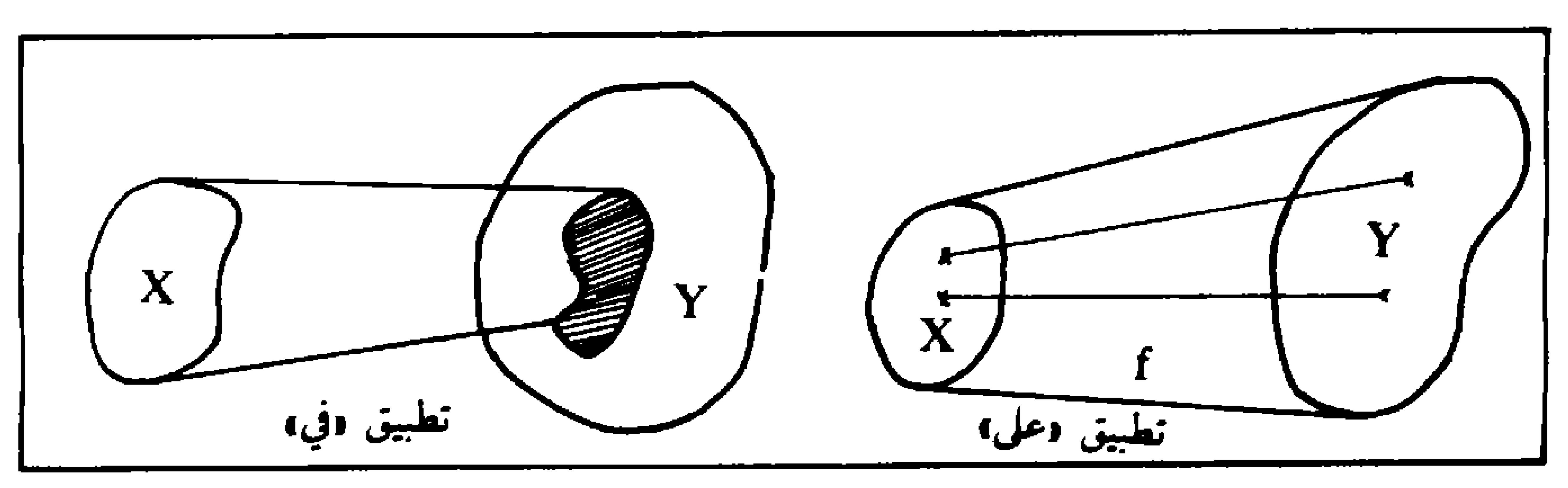
● **الكميات المتناسبة عكسياً:**

(1) نقول إن المتغيرين B,A متناسبان عكسياً إذا كان حاصل ضربها ثابتاً، أي $A\,B = k$ حيث k ثابت.

(2) كما نقول بأن الأعداد $(a_1,a_2,...)$ متناسبة عكسياً مع الأعداد $(b_1,b_2,...)$ إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 = a_2b_2 = ...$ فمثلاً الأعداد (1,2) و (6,3) متناسبة عكسياً لأن $1.6 = 2.3$.

ONTO على

في اللغة هو حرف جر عادي. أما المفهوم الرياضي فهو كما يلي: نقول بأن التطبيق f يطبق المجموعة X علىY إذا كان كل عنصر من Y هو صورة لعنصر من X عبر التطبيق f. أما إذا وجد عنصر (على الأقل) في Y بحيث لا يكون صورة لأي عنصر من X عبر التطبيق f فإننا نقول ان f هو تطبيق المجموعة X في Y.



مثال: $y = 3x + 1$ هو تطبيق لمجموعة الأعداد الحقيقية R على نفسها. أما $y = x^2$ فهو تطبيق للمجموعة R في R لأن مجموعة قيم الدالة هي R^+، أي مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة.

RELATION **علاقة**

مساواة أو متباينة أو أية خاصية تربط بين شيئين. ورياضياً فإن العلاقة هي مجموعة R من الأزواج المرتبة (x,y). إذا كان $(x,y) \in R$ فنقول أن y,x مرتبطان بالعلاقة R ونكتب xRy. مثلاً، العلاقة «أقل من» للأعداد الحقيقية هي مجموعة الأزواج المرتبة (x,y) حيث x و y عددان حقيقيان يحققان $x < y$. إن معكوس علاقة R هو علاقة R^{-1} تحقق الشرط: $(x,y) \in R$ إذا وفقط إذا كان $(y,x) \in R^{-1}$. أنظر تركيب ـ تركيب العلاقات.

- **علاقة انعكاسية، علاقة غير انعكاسية، علاقة لا انعكاسية:**
  انظر انعكاسي ـ علاقة انعكاسية.
- **علاقة غير متناظرة، علاقة متناظرة، علاقة لا متناظرة:**
  انظر متناظر ـ علاقة متناظرة.
- **علاقة تكافؤ:** انظر تكافؤ.
- **علاقة غير متعدية، علاقة لا متعدية، علاقة متعدية:** انظر متعد.

PROJECTIVE 2 **علاقة إسقاطية**

نقول عن شكلين أساسيين أن بينهما **علاقة إسقاطية** أو أنهما يشكلان إسقاطية إذا كان هناك تقابل واحد لواحد بين عناصرهما بحيث تقابل كل أربعة عناصر توافقية في أحدهما أربعة عناصر توافقية في الآخر.

MARK **علامة (إحصاء)**

قيمة تستخدم في الجداول التكرارية لتعبر عن فترة معينة. وغالباً ما تكون العلامة مساوية لمنتصف الفترة أو أقرب عدد صحيح لمنتصف الفترة.

علم الحركة KINEMATICS

هو فرع الميكانيك الذي يدرس حركة الأجسام الصلبة دون النظر إلى كتلها وإلى القوى المولدة للحركة. أما مقومات هذا العلم فهي مفهوم الزمن ومفهوم الفضاء.

علم السكون STATICS

فرع من علم ميكانيك الأجسام الصلبة والسائلة يبحث في دراسة الحالات التي تؤثر فيها قوى على جسم بحيث يبقى هذا الجسم ساكناً بالنسبة إلى إطار استناد معين. انظر **إطار**.

علم الضبط CYBERNETICS

علم ابتدعه نوربرت وينر عام ١٩٤٧ لمعالجة الصفات المشتركة في أنظمة التحكم والمعلومات في المكائن وفي المخلوقات الحيّة. ويبحث هذا العلم في مسائل الأنظمة في علم الأحياء وفي الهندسة والحاسبات الالكترونية.

علم المثلثات TRIGONOMETRY

علم يعنى بدراسة خصائص الدوال المثلثية وتطبيقاتها على المسائل الرياضية بما في ذلك حل المثلث وكذلك تطبيقاتها في العلوم المختلفة مثل الملاحة وعلم الطبيعة وهندسة المساحة. إن علم المثلثات على نوعين: **علم المثلثات المستوية** ويعنى بدراسة المثلثات في السطح المستوي و**علم المثلثات الكروية** ويعنى بدراسة المثلثات الكروية. انظر **كروي** و **مثلثي**.

- **صيغ نصف الزاوية في المثلثات المستوية:**

(1) صيغ تعبر عن علاقات بين أضلاع المثلث المستوي وإحدى زواياه وتستخدم لحل المثلث المستوي بدلاً من قانون جيب التمام لملاءمتها أكثر في الحسابات اللوغاريتمية. فإذا كانت A و B و C زوايا مثلث وكانت c,b,a أطوال أضلاعه المقابلة لتلك الزوايا على الترتيب فإن

$\tan \frac{1}{2} A = r/(s - a)$,

$\tan \frac{1}{2} B = r/(s - b)$,

$\tan \frac{1}{2} C = r/(s - c)$,

حيث $S = (a+ b + c)/2$ و $r= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/S}$.

(2) متطابقات تعبر عن قيمة دالة مثلثي لنصف زاوية بدلالة دالة مثلثي للزاوية. وهذه المتطابقات هي:

$\sin \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{(1 - \cos A)/2}$

$\cos \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{(1 + \cos A)/2}$

$\tan \frac{1}{2} A = \sin A/(1 + \cos A) = (1 - \cos A)/\sin A$

● **صيغ نصف الزاوية ونصف الضلع في المثلثات الكروية:**

صيغ تعبر عن ظل نصف الزاوية ونصف الضلع لمثلث كروي بدلالة أضلاعه. فإذا كانت $\propto$ و β و γ زوايا المثلث الكروي وكانت a و b و c أطوال أضلاعه المقابلة لتلك الزوايا على الترتيب فإن **صيغ نصف الزاوية هي:**

$\tan \frac{1}{2} \propto = r/\sin(s - a)$

$\tan \frac{1}{2} \beta = r/\sin (s - b)$

$\tan \frac{1}{2} \gamma = r/\sin (s - c)$

$s = (a + b + c)/2$

حيث $r = \sqrt{\sin (s-a) \sin (s -b) \sin (s-c)/\sin s}$

أما صيغ نصف الضلع للمثلث الكروي فهي:

$\tan \frac{1}{2} a = R \cos (S - \propto)$

$\tan \frac{1}{2} b = R \cos (S - \beta)$

$\tan \frac{1}{2} c = R \cos (S - \gamma)$

حيث $S = (\propto + \beta + \gamma)/2$

$R = \sqrt{-\cos S/\cos(s - \propto) \cos (S - \beta) \cos (S - \gamma)}$

● **متطابقات على المثلثات المستوية:**

متطابقات تعبر عن علاقات بين الدوال المثلثاتية وهي على أنواع:

(1) **متطابقات أساسية:** أنظر مثلثي دوال مثلثية.

(2) **متطابقات اختزال**: تعبر عن قيمة دالة مثلثية عند أية زاوية بدلالة دالة مثلثية عند زاوية A بحيث $0 \le A \le 90^\circ$ أو $0 \le A \le 45^\circ$ ومن هذه المتطابقات:

$$\sin(90^\circ \pm A) = \cos A,$$
$$\sin(180^\circ \pm A) = \mp \sin A,$$
$$\sin(270^\circ \pm A) = -\cos A,$$
$$\cos(90^\circ \pm A) = \mp \sin A,$$
$$\cos(180^\circ \pm A) = -\cos A,$$
$$\cos(270^\circ \pm A) = \pm \sin A,$$
$$\tan(90^\circ \pm A) = \mp \cot A,$$
$$\tan(180^\circ \pm A) = \pm \tan A,$$
$$\tan(270^\circ \pm A) = \mp \cot A.$$

(3) **متطابقات الجمع والطرح**: متطابقات تعبر عن قيمة الدالة المثلثاتية لمجموع أو الفرق بين زاويتين بدلالة قيم دوال مثلثية لكل من الزاويتين على حدة، ومن أهم هذه المتطابقات:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$
$$\tan(x \pm y) = (\tan x \pm \tan y)/(1 \mp \tan x \tan y)$$

(4) **متطابقات ضعف الزاوية**: ومن أهمها

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\tan 2x = 2\tan x/(1 - \tan^2 x)$$

(5) **متطابقات نصف الزاوية**: انظر صيغ نصف الزاوية أعلاه.

(6) **متطابقات الجداء**، وهي:

$$\sin x \cos y = {}^1\!/_2[\sin(x+y) + \sin(x-y)],$$
$$\cos x \sin y = {}^1\!/_2[\sin(x+y) - \sin(x-y)],$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)],$$

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)].$$

(7) متطابقات أخرى:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\tan 3x = (3\tan x - \tan^3 x)/(1 - 3\tan^2 x)$$

$$\sin nx = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2i+1}(-1)^i \sin^{2i+1}x \cos^{n-(2i+1)}x$$

$$\cos nx = \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i}(-1)^i \sin^{2i}x \cos^{n-2i}x$$

● علم المثلثات الكروي:

انظر كروي.

علم الميكانيك — MECHANICS

هو النظرية الرياضية لدراسة الحركات والنزعة إلى الحركة للجسيمات والأنظمة تحت تأثير مجموعة من القوى والقيود. كذلك يدرس هذا العلم حركات الكتل وتأثير القوى المسببة للحركة أو المعدلة لها. وينقسم هذا العلم عادة إلى فرعين رئيسيين هما علم الحركة وعلم الديناميك.

● **ميكانيك تحليلي:**

هو البنية الرياضية لعلم الميكانيك والتي تقوم اليوم على الصياغة التي قام بها **لاغرانج وهاميلتون** وتعرف هذه البنية أيضاً باسم **الميكانيك النظري** ويستخدم الميكانيك التحليلي حسبان التفاضل والتكامل على نطاق واسع.

● **ميكانيك السوائل:**

هو العلم الذي يدرس نظرية الغازات والديناميك المائي والهوائي وأهمية هذا العلم تنبع من ارتباط هذا العلم بالتطبيقات العملية والمواصلات بشكل خاص.

SCIENTIFIC علمي

● ترميز علمي:

طريقة كتابة الأرقام بشكل حاصل ضرب عدد بين 1 ,10 في قوى 10 مع كتابة جميع المنازل العشرية المعنوية. مثلاً نكتب 297.2 بالشكل 2.972×10^2 ونكتب 0.00029 بالشكل 2.9×10^{-4}.

ELEVATION علو

● زاوية العلو:

انظر زاوية ـ زاوية العلو.

● علو نقطة:

هو ارتفاع النقطة فوق مستو معطى يكون في العادة مستوى سطح البحر.

UPPER علوي

● حد علوي:

انظر حد.

● نهاية المكاملة العلوية:

انظر تكامل.

ARGUEMENT عمدة

● عمدة عدد عقدي:

وهي سعته، انظر سعة ـ سعة عدد عقدي.

● عمدة دالة:

ونعني بها المتغير المستقل. انظر دالة.

● العمد في جدول قيم دالة:

هي القيم في مجال الدالة والتي تمت جدولة القيم المقابلة لها في المدى.

مثلاً العمد في الجداول المثلثية هي الزوايا التي نجدول دوالها وفي جداول اللورغاريتمات العمد هي الأرقام التي جدولت لوغاريتماتها.

عمر الخيام

هو أبو الفتح عمر الخيام، العالم والشاعر والفيلسوف. ولد في نيسابور سنة ١٠٥٠ ميلادية وتوفي فيها سنة ١١٢٢ ميلادية ولقب بالخيام لأنه كان يشتغل في بدء حياته بحرفة الخيامة. كتب في الجبر فتجاوز الخوارزمي ليصل لحل المعادلات من الدرجة الثالثة وأعتقد خطأ أن حل هذه المعادلات بشكل عام لا يكون إلا بالطرق الهندسية، أي أن الحلول الحسابية لهذه المعادلات مستحيلة، وقد ثبت خطأ اعتقاده في القرن السادس عشر. وقد رأى الخيام أن حل هذه المعادلات من الدرجة الثالثة مستحيل هندسياً إذا استخدمنا الهندسة المستوية، أي المستقيمات والدوائر في المستوى وذلك لأن درجتها ثلاثة وبناء عليه فقد استخدم القطوع المخروطية لايجاد الحل الهندسي. ومن الطبيعي أن الخيام عجز عن تعميم حله الهندسي إلى معادلات الدرجة الرابعة وما فوق وذلك «لأن الفضاء لا يحتوي على أكثر من ثلاثة أبعاد»، يقول الخيام في أحد كتبه بأن من يعتقد بأن الجبر هو مجرد حيل للحصول على المجاهيل فإنه يفكر عبثاً وأنه يجب ألا نعير اهتمامنا إلى أن الجبر والهندسة مختلفان في الشكل، فما الجبر سوى حقائق هندسية مبرهنة. هذه الفكرة هي الأساس الذي تبناه ديكارت فكانت الهندسة التحليلية، وعندما استبدل الخيام نظرية إقليدس حول التناسب بالطريقة العددية التي استنبطها فقد اقترب كثيراً من تعريف الأعداد الصماء ومن مفهوم الأعداد الحقيقية بوجه عام. ويقول الخيام أنه تمكن من إيجاد مفكوك ذي حدين مرفوع إلى قوة أسها أكثر من اثنين لكن قاعدة الخيام هذه لم تصلنا ضمن آثاره الباقية. كما بحث الخيام فيما هو معروف اليوم بمبرهنة فيرما وأثبت أن مجموع عددين مكعبين لا يمكن أن يكون عدداً مكعباً. (انظر فيرما ــ مبرهنة فيرما). ولما أراد السلطان ملكنشاة تعديل التقويم السنوي استعان بالخيام وآخرين فوضع الخيام تقويماً دقيقاً يعتقد البعض أنه أدق من التقويم

الغريغوري إذ أن هذا الأخير يؤدي إلى خطأ مقداره يوم كل ٣٣٣٠ سنة بينما خطأ تقويم الخيام مقداره يوم كل ٥٠٠٠ سنة.

وللخيام بالاضافة إلى رباعياته الشهيرة عدد كبير من المؤلفات وأغلبها باللغة الفارسية. أما أشهر ما كتب بالعربية فكان «مقالة في الجبر والمقابلة» و «ميزان الحكمة» و «شرح ما أشكل من مصادرات إقليدس» ويقوم في المقالة الأولى بمحاولة لاثبات الموضوعة الخامسة لاقليدس فابتدع مفهوم «المحاذاة» مثبتاً أن كل خطين متوازيين يكونان متحاذيين ثم بني على ذلك ليصل إلى الاستنتاج أنه إذا قطع خط مستقيم أحد متوازيين فلا بد أن يقطع الموازي الثاني ويكون بذلك قد أثبت ما افترضه ابن الهيثم صحيحاً. أما برهان الخيام فيبدأ بشكل رباعي له ضلعان متساويان وعمودياً على ضلع ثالث هو القاعدة، ويسأل بعدها عن قيمة الزاويتين الباقيتين وهما متساويتان بالضرورة. ثم يثبت أنه من المستحيل أن تكون الزاويتان حادتين أو أن تكونا منفرجتين. يبقى أن الزاويتين قائمتان وعليه يتم إثبات الموضوعة الخامسة. أما الخلل في برهان الخيام فهو اعتماده على افتراض نسبة إلى أرسطو ومفاده أن كل خطين متقاربين لا بد أن يلتقيا وهذا افتراض مكافىء للموضوعة الخامسة. والطريف أن الشكل الرباعي الذي أنشأه الخيام معروف اليوم بشكل «زاخاري» نسبة إلى رياضي أوروبي جاء في القرن الثامن عشر.

عملية OPERATION

هي ما يجري تنفيذه لاستخلاص نتيجة بعد تطبيق بعض القواعد. وأمثلة ذلك عملية الجمع (+)، الضرب (. , ×)، عملية القسمة (/, ÷) ، عملية الطرح (-) وعمليات استخراج اللوغاريتمات والجذور وعمليات التحويل والتعويض.

- **عملية على مجموعة S:**

هي دالة F معرفة على مجموعة المتواليات المرتبة من الشكل $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ وتأخذ قيمها في S، حيث $x_1,x_2,\ldots,x_n$ هي عناصر تنتمي إلى S، وتسمى هذه

العملية أيضاً **عملية داخلية**. وتكون العملية **أحادية، ثنائية أو ثلاثية،...** حسبما تكون n مساوية 3,2,1,... ونسمي العملية **خارجية** إذا كانت الدالة F لا تأخذ قيمها في S أو كانت بعض الأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ غير منتمية إلى S.

مثال (1): جداء المصفوفات هو عملية داخلية.

مثال (2): جمع المصفوفات هو عملية داخلية.

مثال (3): ضرب المصفوفة بعدد هو عملية خارجية إذا اعتبرنا أن S هي مجموعة المصفوفات $A_{n \times n}$ $n > 1$.

مثال (4): عملية الجمع العادي المعرفة على الأعداد الحقيقية هي عملية داخلية.

مثال (5): عملية الجمع العادي المعرفة على الأعداد الصماء هي عملية خارجية، لأن $2=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)$ $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})$ ليس أصم.

مثال (6): الجداء الداخلي (العددي السلمي) المعرف على المتجهات هو عملية خارجية.

مثال (7): ضرب متجه بعدد هو عملية خارجية.

انظر **ضرب، ثنائي، ثلاثي**.

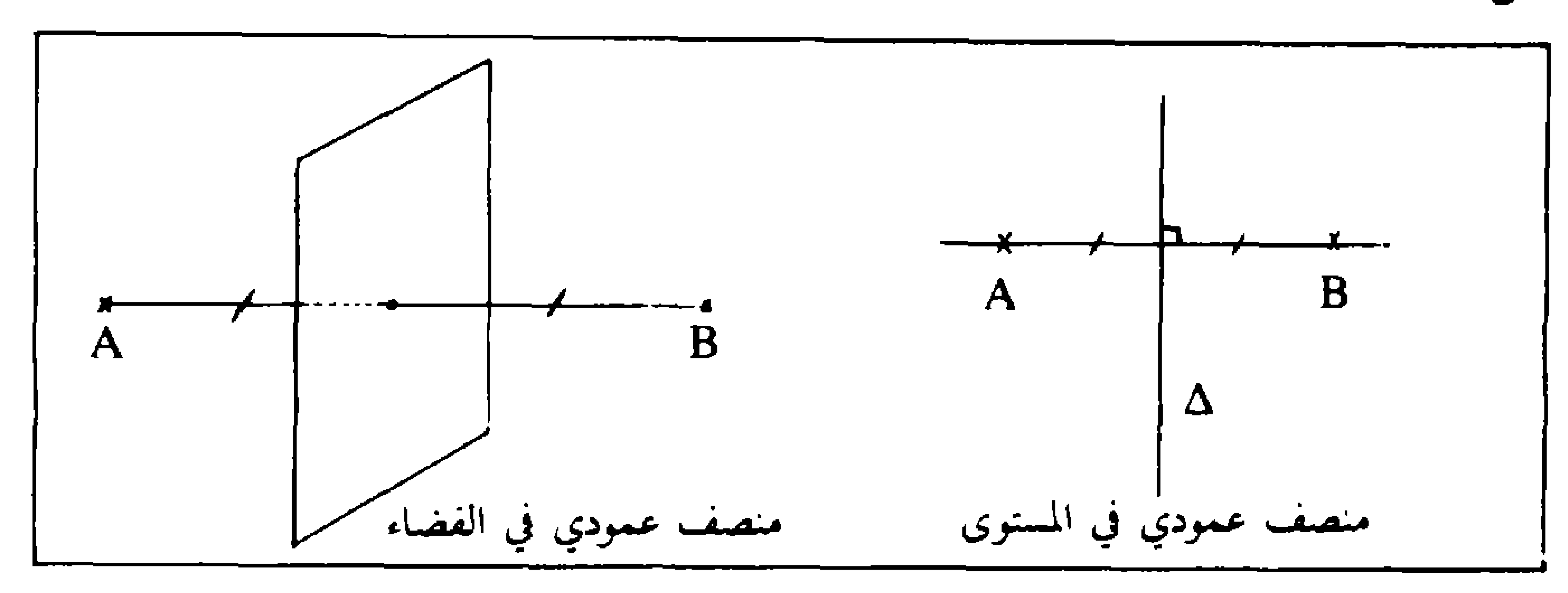
عمودٌ COLUMN

هو صفيف رأسي من الحدود، يستعمل في الجمع والطرح والمعينات والمصفوفات.

- **عمود في معين:**
  انظر **معين**.

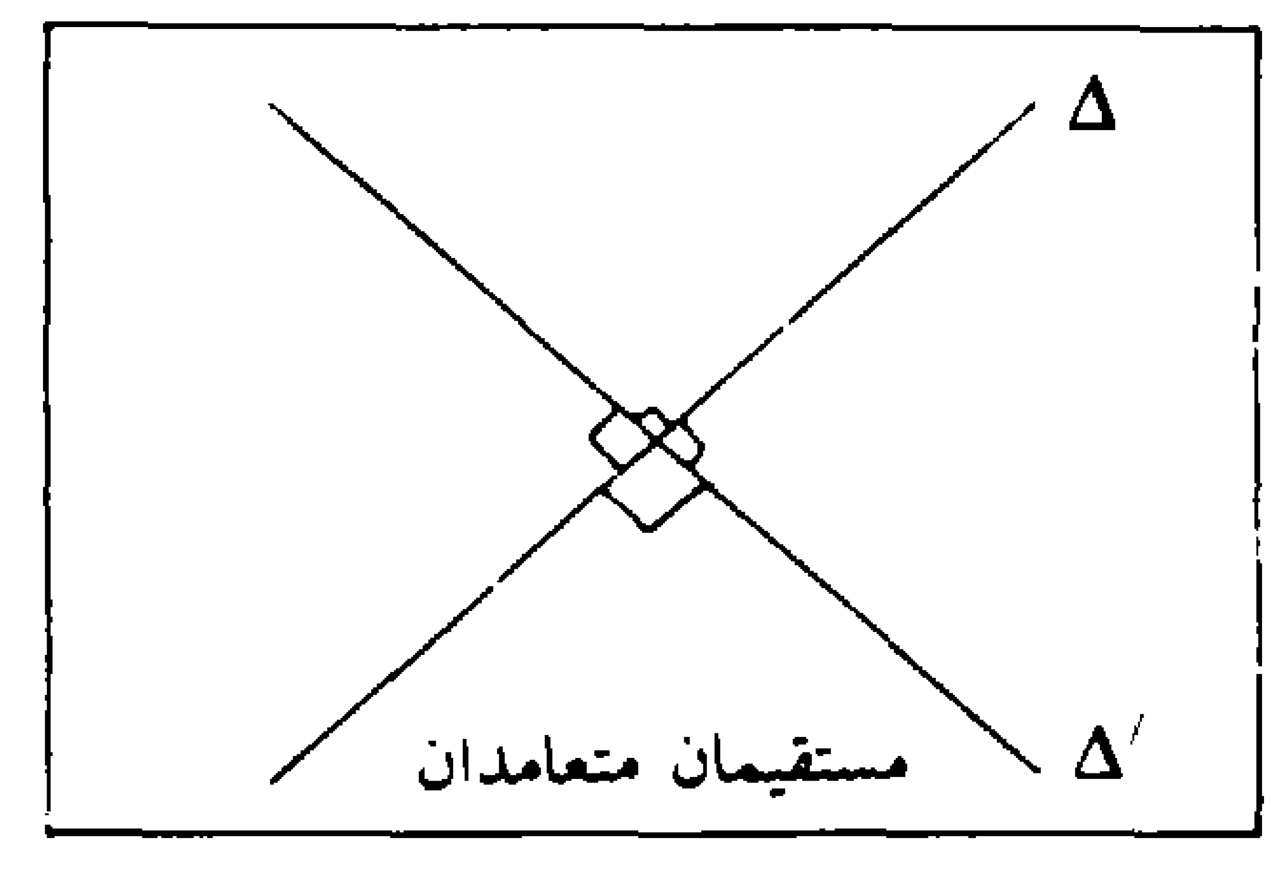
- **عمود في مصفوفة:**
  انظر **مصفوفة**.

منصف عمودي لقطعة مستقيمة AB في المستوى هو المستقيم Δ العمودي على AB في منتصفها ونشير هنا إلى أن أية نقطة في ΔΣ تكون متساوية البعد عن طرفي AB أما المنصف العمودي للقطعة AB في الفضاء فهو المستوى P العمودي على AB في منتصفها وتكون كل نقطة من نقط هذا المستوى متساوية البعد عن B،A .



● **مستقيمان متعامدان (في المستوى):**

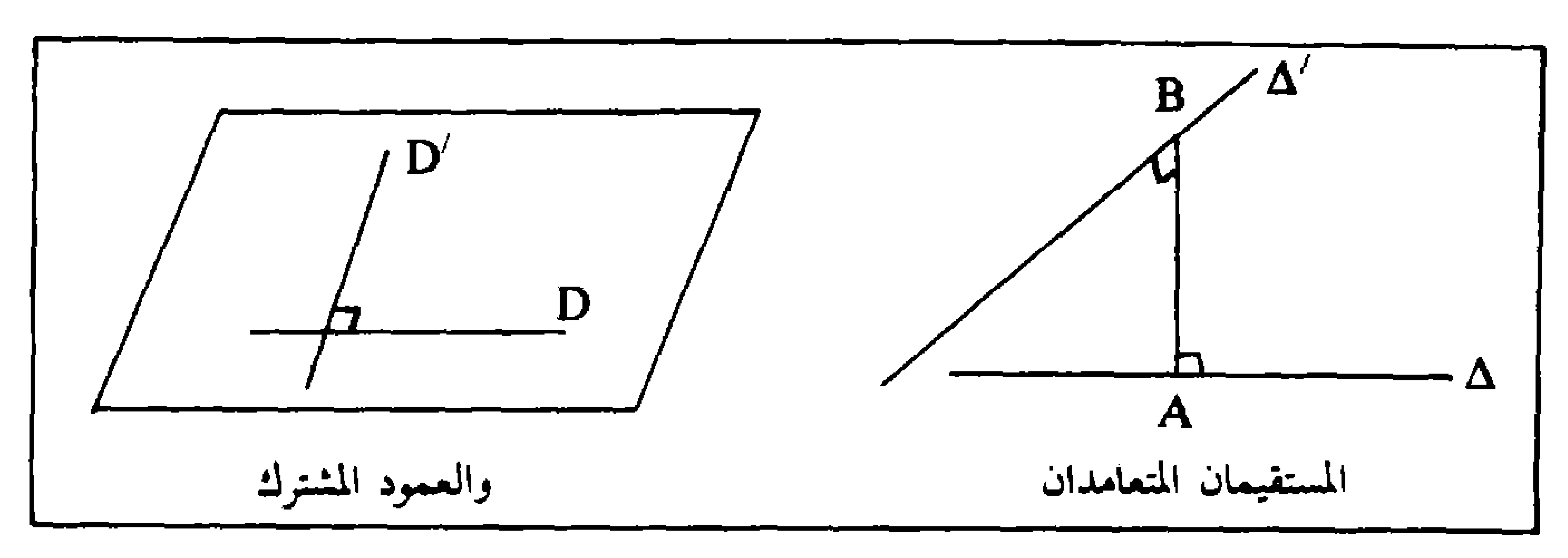
هما مستقيمان Δ و Δ' متقاطعان ويشكلان أربع زوايا قائمة متجاورة ونقول إن Δ عمودي على Δ' و Δ' عمودي على Δ كما يبين الشكل.



فإذا كان ميل مستقيم هو $m\neq0$ فإن ميل المستقيم العمودي عليه يساوي $-\frac{1}{m}$. أما إذا كان ميل المستقيم مساوياً للصفر، فهذا يعني أنه يوازي المحور ox والمستقيم العمودي عليه سيكون موازياً للمحور oy.

● **مستقيمان متعامدان (في الفضاء):**

نقول عن مستقيمين Δ و Δ' في الفضاء بأنهما متعامدان إذا تعامد المستقيمان D و D' الموازيان لهما والواقعان في مستوى واحد. فإذا كان Δ يوازي المتجه (ℓ,m,n) وكان Δ' يوازي المتجه (ℓ',m',n') فإن الشرط اللازم والكافي لتعامدهما هو أن يتحقق الشرط $\ell\ell' + mm' + nn' = 0$.

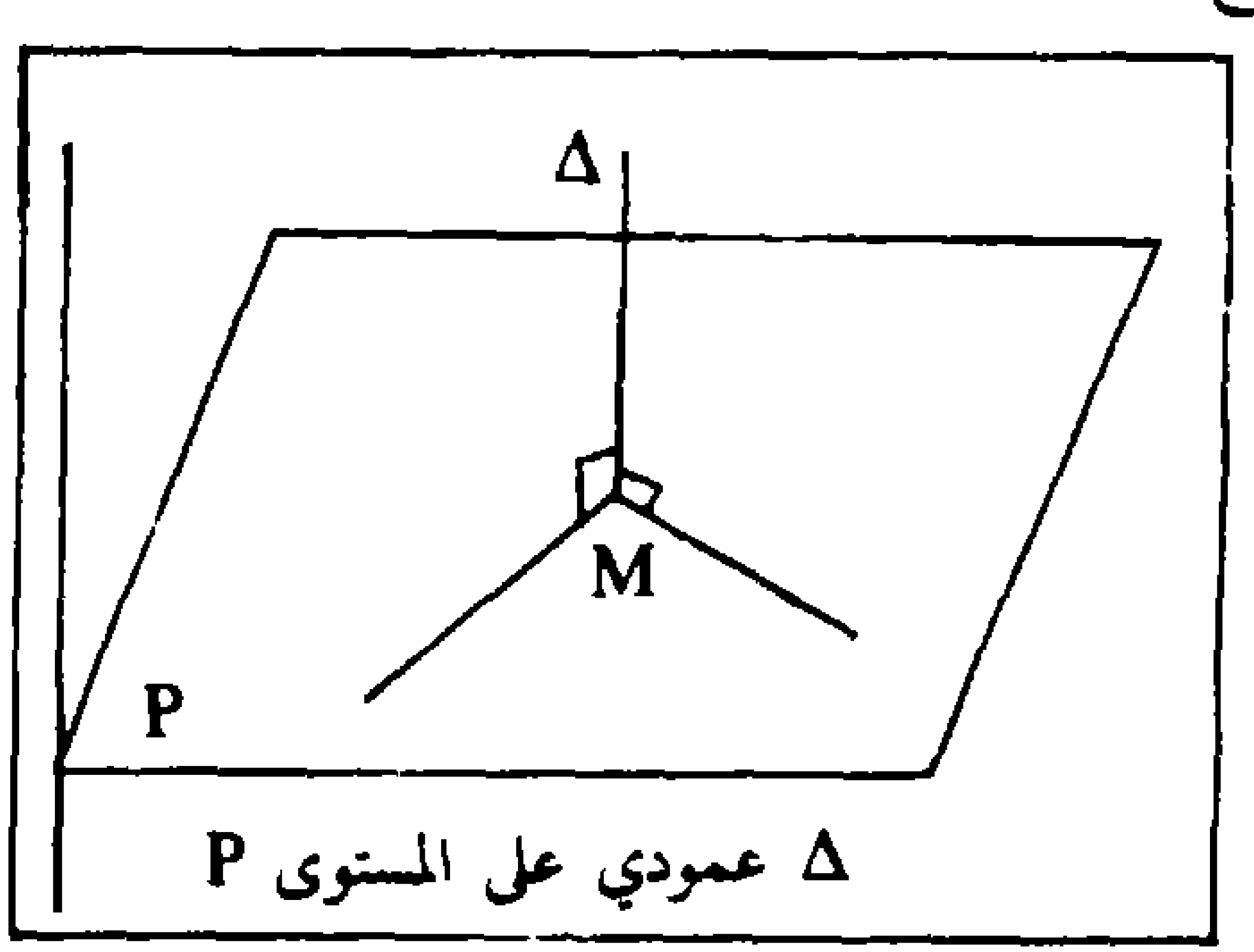


● **عمود مشترك لمستقيمين أو أكثر:**

هو المستقيم الذي يتعامد مع كل من المستقيمين (أو مع جميع المستقيمات) يبين الشكل مستقيمين متعامدين وعموداً مشتركاً هو AB.

● **مستقيم عمودي على مستوى P:**

هو المستقيم الذي يتعامد مع جميع المستقيمات الواقعة في p. ويكفي ليتحقق ذلك أن يتعامد هذا المستقيم مع مستقيمين متقاطعين في المستوى. فإذا كان (ℓ,m,n) متجهاً عمودياً على المستوى P وكان (p,q,r) متجهاً موازياً للمستقيمΔ فإن Δ يتعامد مع P إذا كان يوجد عدد$\alpha \neq 0$ بحيث $(\ell,m,n) = \alpha\,(p,q,r)$.

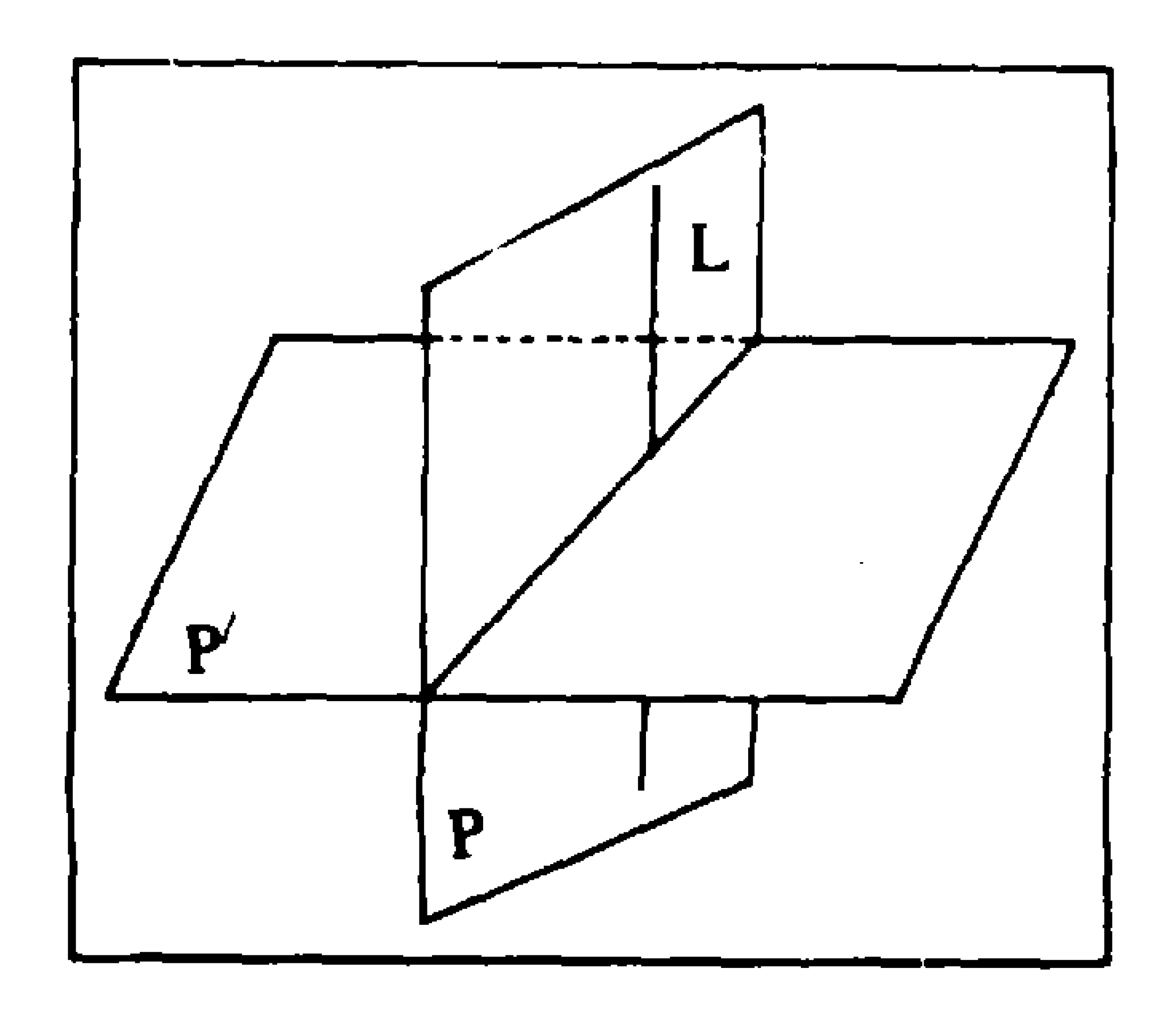


● **موقع عمود على مستقيم أو مستوٍ:**

هي نقطة تقاطع العمود مع المستقيم أو المستوى(M هي موقع Δ على P).

● **مستويان متعامدان:**

ليكن لدينا المستويان المتقاطعان P و P/. إذا كان L مستقيماً واقعاً في P وعمودياً على المستوى P/ قلنا عندئذٍ أن P و P/ متعامدان وأن كلاً منهما عمودي على الآخر ويشكل المستويان عندئذٍ ما نسميه زاوية زوجية قائمة.



فإذا كانت (ℓ, m, n) هي مركبات متجه عمودي على P وكانت (ℓ', m', n') هي مركبات متجه عمودي على P' فإن P يتعامد مع P' إذا كان:

$$\ell\ell' + mm' + nn' = 0$$

● **منحنيان متعامدان:**

في نقطة M هما منحنيان لهما مماسان متعامدان في M.

● **سطحان متعامدان:**

نقول بأن السطح S عمودي على سطح S' في النقطة M إذا كان المستوى المماسي للسطح S في النقطة M يتعامد مع المستوى المماسي للسطح S' في تلك النقطة.

عنصر — ELEMENT

انظر **مخروط واسطوانة واسطواني ـ سطح اسطواني**، وانظر كذلك **معين**.

● **عنصر دالة تحليلية لمتغير عقدي:**

انظر **تحليلي ـ استمرار تحليلي**.

● **عنصر المكاملة:**

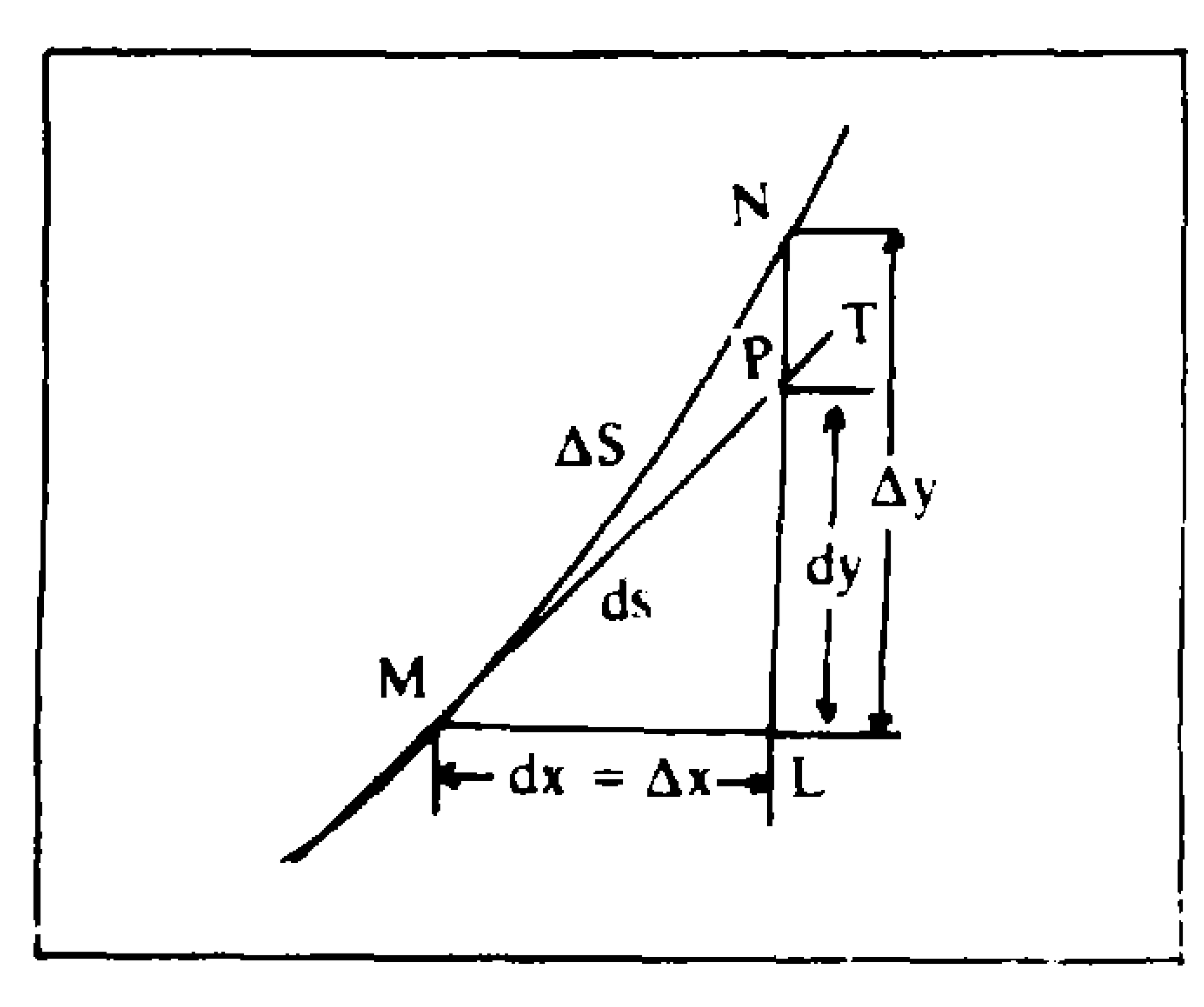
هو التعبير الذي يلي رمز التكامل $\int$ في تكامل محدد. وإذا استخدم لإيجاد المساحة أو الحجم أو الكتلة.. إلخ، فإن العنصر يسمى بعنصر المساحة أو الحجم أو الكتلة.. على الترتيب. ويمكن النظر إلى عنصر المساحة مثلاً على أنه تقريب لمساحة شريحة صغيرة من الجسم المراد حساب سطحه أو حجمه.

ونورد هنا بعضاً من عناصر المكاملة:

(1) **عنصر طول القوس لمنحنى**: هو تقريب لطول المنحنى بين نقطتين (أنظر طول). وفي حالة منحن مستوى فإن عنصر طول القوس يساوي:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx \quad = \sqrt{(\frac{dx}{dy})^2 + dy}$$

حيث نوجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x و $\frac{dx}{dy}$ بدلالة y من معادلة المنحنى.



ومن الشكل فإن $\widehat{MP} = ds$ تعتبر تقريباً لطول القوس $\widehat{MN} = \Delta s$ والذي ينتج من الزيادة في Δx في المتغير المستقل.

ويمكن التعبير عن ds قطبياً بالشكل $ds = \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{ds})^2 d\theta}$. إذا كان لدينا منحنى فضائي معين بالمعادلات الوسيطية $z = h(t), \ y = g(t), \ x = f(t)$ فإن عنصر الطول في هذه الحالة:

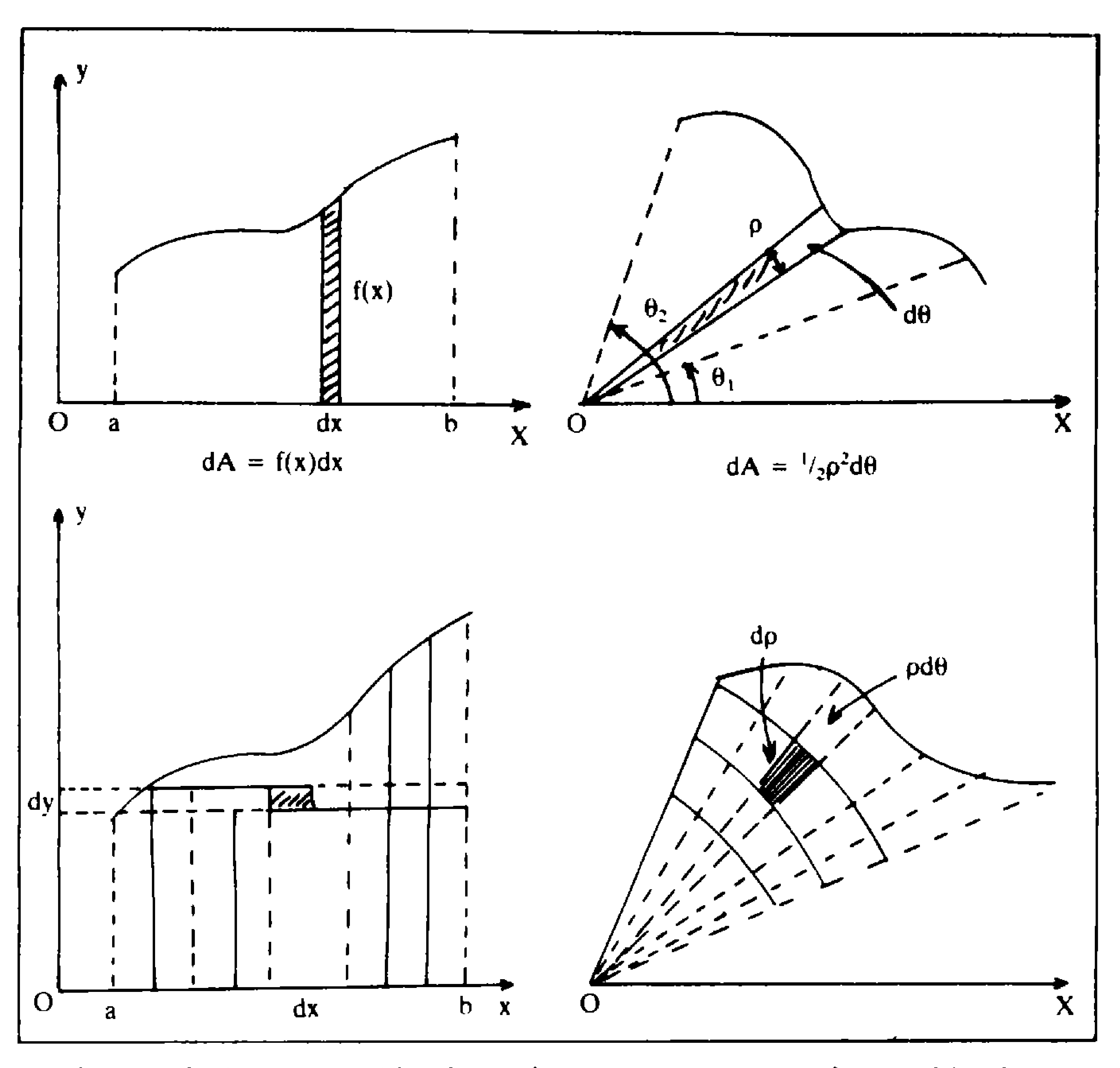
$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} \quad dt$$

(2) **عنصر المساحة المستوية**: تؤخذ عادة الكمية $f(x)dx$ على أنها عنصر المساحة dA لمساحة محدودة بالمنحنى $y = f(x)$ ومحور الاحداثيات x والخطين $x = a$ و $x = b$ وبالتالي فإن المساحة تساوي $\int_a^b f(x)dx$. أما في الاحداثيات القطبية فنأخذ الكمية $\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ على أنها عنصر المساحة. وفي هذه الحالة فإن العبارة $A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$ تمثل المساحة المحدودة بين الشعاعين $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ والمنحنى المعطى قطبياً بالمعادلة $\rho = \rho(\theta)$. وفي **التكامل الثنائي** فإن عنصر المساحة في الاحداثيات الديكارتية المستطيلية هو dxdy أما في الاحداثيات القطبية فهو $\rho d\rho d\theta$.

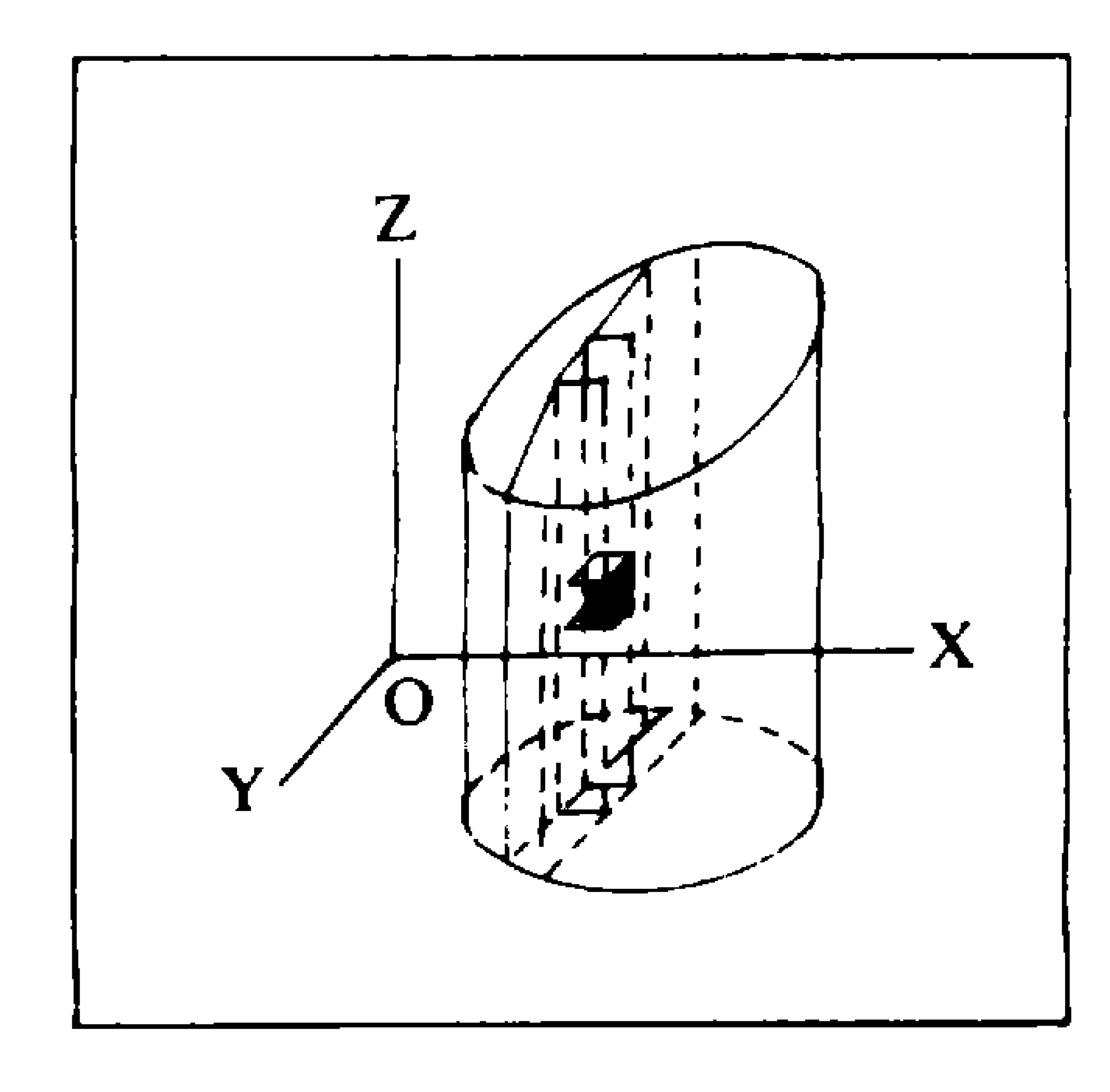
انظر أيضاً سطح ــ مساحة السطح ــ سطح الدوران.

(3) **عنصر الحجم**: هو $A(h)dh$ حيث $A(h)$ تعبر عن مساحة مقطع مستعرض عمودي على المحور h.

انظر دوران ــ مجسم الدوران.



وفي التكامل الثلاثي، فإن عنصر الحجم في الاحداثيات الديكارتية يكون $dx\ dy\ dz$ ويكون الحجم مساوياً: $\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} dx\ \ dy\ \ dz$



حيث z_1 و z_2 ثوابت و y_1 و y_2 قد تكون دوالاً في z وأما x_1 و x_2 فقد تكون دوالاً في y أو z وهذه الدوال المذكورة أعلاه تعتمد بصورة أساسية على شكل السطح الذي يحد الحجم تحت الدراسة. وبالإمكان تغيير الترتيب في المكاملة إذا كان ذلك ضرورياً لتسهيل عملية إيجاد الحجم.

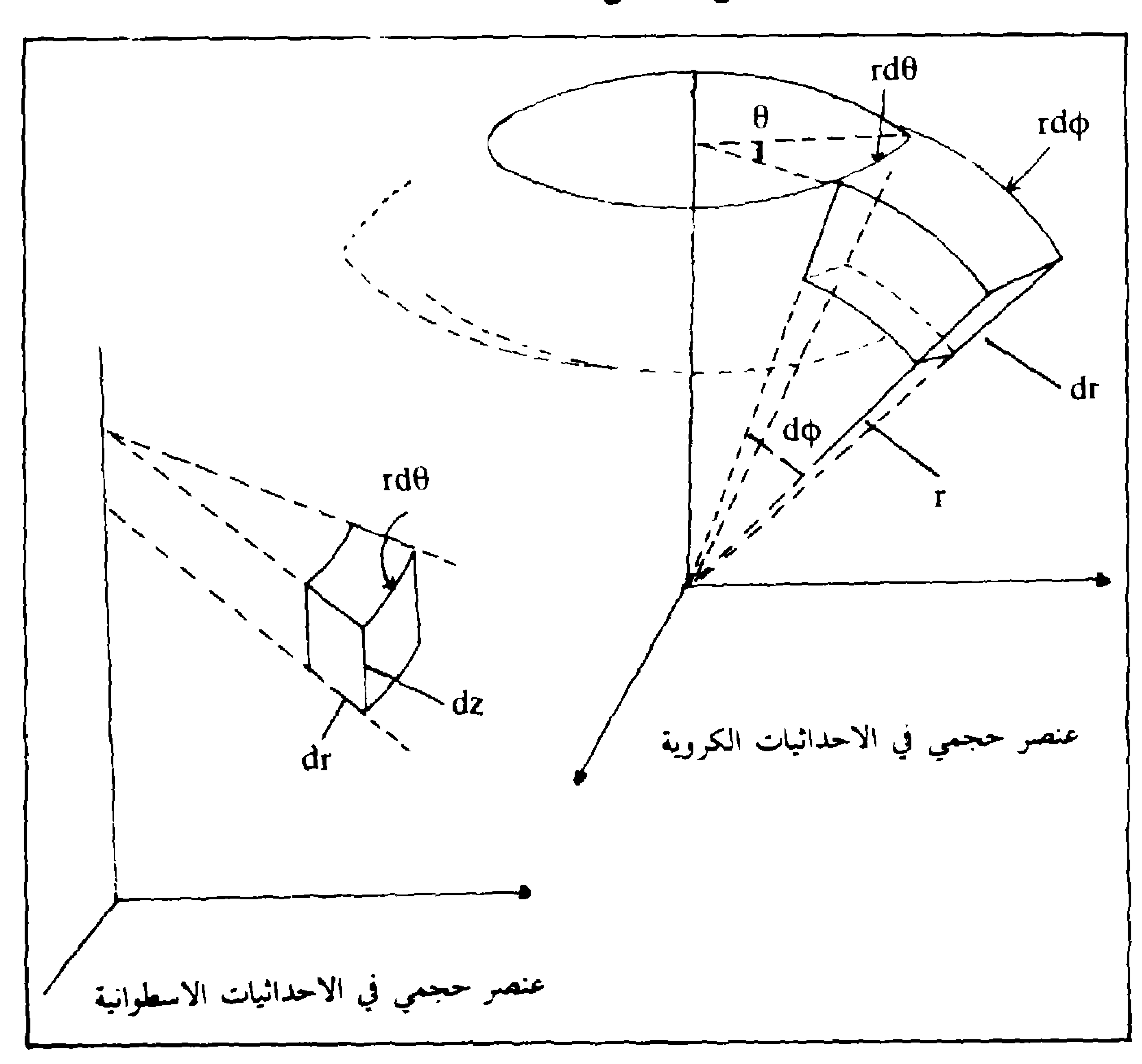
ويبين الشكل عنصر حجم في الاحداثيات القائمة كما ويصور طريقة إيجاد الحجم بالتكامل.

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dz \quad dy \quad dx$$

وفي **الاحداثيات الاسطوانية** يكون عنصر الحجم مساوياً لـ $dv = r\ dr\ d\theta\ dz$. أما في **الاحداثيات الكروية** فيكون عنصر الحجم مساوياً لـ $dv = r^2 \sin \theta dr\ d\theta\ d\phi$.

(4) ويكون عنصر الكتلة مساوياً للمقدار $dm = \rho dv$ حيث dv عنصر قوس أو مساحة أو حجم وتكون ρ هي الكثافة.

انظر **مساحة وحجم وعزم** ـ عزم كتلة وعزم القصور الذاتي، انظر كذلك **ضغط** ـ ضغط السائل و **شغل**.



عنصر حجمي في الاحداثيات الكروية

عنصر حجمي في الاحداثيات الاسطوانية

● **العنصر المحايد:**

لتكن S مجموعة معرفاً عليها عملية ثنائية xoy. نعرف **العنصر المحايد** في S بأنه العنصر e بحيث $xoe = eox = x$ لكل $x \in S$. ويقال إن e **عنصر محايد يميني** إذا كان $xoe = x$ لكل $x \in S$ ويكون **عنصراً محايداً يسارياً** إذا كان $eox = x$ لكل $x \in S$.

مثال: العنصر المحايد للجمع هو 0 لأن $x + 0 = 0 + x = x$ لكل x. أما العنصر المحايد للضرب فهو 1 لأن $1.x = x.1 = x$ وإذا كانت S هي مجموعة كل المجموعات الجزئية في المجموعة T وكانت العملية المعرفة على S هي الاتحاد ∪ فإن المجموعة الخالية φ هي العنصر المحايد لأن $A \cup \phi = \phi \cup A = A$. أما العنصر المحايد لعملية التقاطع على S فهي المجموعة T لأن $T \cap A = A \cap T = A$.

● **الدالة المحايدة:**

هي الدالة f المعرفة على S بحيث يكون $f(x) = x$ لكل $x \in S$. فمثلاً الدالة المحايدة لمجموعة الأعداد الحقيقية هي الدالة f والتي بيانها يكون الخط المستقيم $y = x$ حيث $y = f(x) = x$ لكل عدد x.

● **المصفوفة المحايدة:** انظر مصفوفة.

عنقودي — CLUSTER

● **نقطة عنقودية:**

وتستخدم بمعنى نقطة تراكم.

عيار التجزئة — FINENESS OF A PARTITION

انظر تجزئة ـ تجزئة الفترة والمجموعة.

عينة (إحصاء) — SAMPLE

هي مجموعة جزئية منتهية من المجتمع الإحصائي.

انظر عشوائي ـ عينة عشوائية وعينة عشوائية مطبقة. أنظر منظم ـ عينة منظمة.

● **عزم العينة:**

إذا كانت $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ عينة عشوائية فإن عزم العينـة من رتبة k هو $\sum_{i=1}^{n} X_i^k/n$. حيث $k = 1,2,\ldots$. إذا كان $k = 1$ فإن العزم الأول $\Sigma X_i/n$ يسمى **وسط العينة** ويرمز له بالرمز $\bar{X}$.

● **عزم العينة المركزي:**

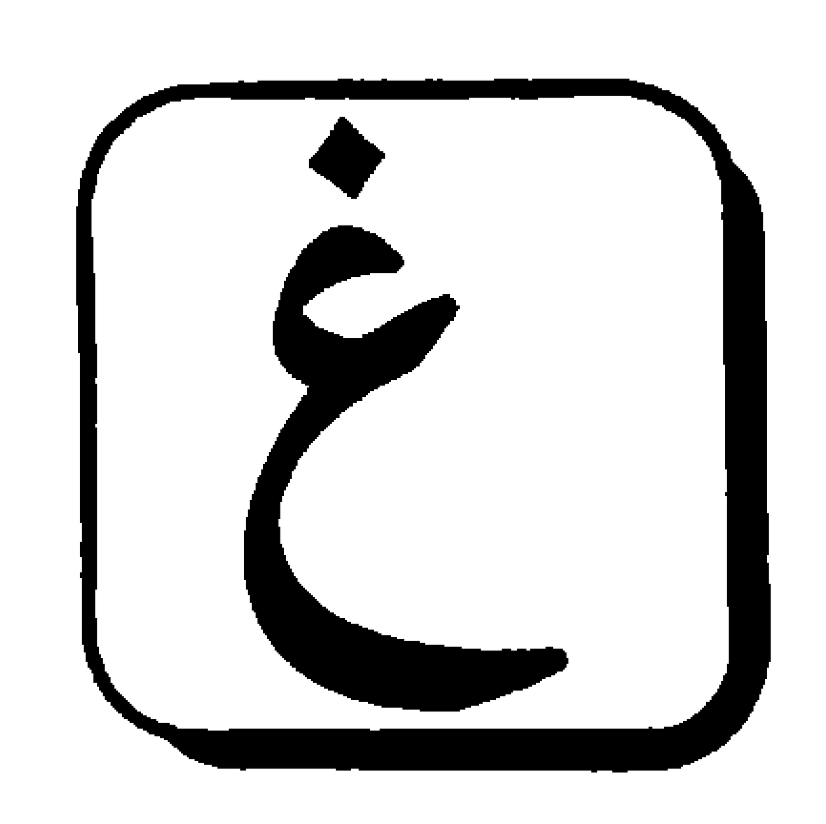
نسمي المقدار $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k/n$ بعزم العينة المركزي حول وسط العينة من رتبة k.

● **تباين العينة:**

انظر تباين.

● **انحراف العينة المعياري:**

يساوي الجذر الموجب لتباين العينة.



غائر **LACUNARY**

● **الفضاء غائر بالنسبة لدالة تحليلية أحادية المولد:**

هو مجال في المستوى العقدي z، بحيث إن أي نقطة في هذا المجال لا يمكن أن تغطي بمجال وجود الدالة المعطاة.

انظر **أحادي المولد**، دالة تحليلية أحادية المولد.

غالوا، (إيفاريست) **GALOIS (1832-1811)**

هو علامة الجبر الذي اشتهر لنظريته المسماة باسمه. ولقد قتل في مبارزة سياسية في العشرين من عمره.

● **حقل غالوا:**

لنفرض أن p كثير حدود معاملاته في حقل F. يعرف **حقل غالوا** F^* على p بالنسبة لـ F بأنه الحقل الأصغري الذي يحتوي على F وله الخاصية بأنه يمكن تحليل p إلى عوامل خطية معاملاتها في F^*. وإذا كانت درجة p تساوي n فإن F^* له n الأصفار في F^* مع حساب تضاعف الأصفار وتكون درجة F^* في هذه الحالة !n على الأكثر كامتداد لـ F.

انظر **امتداد ــ** امتداد حقل.

ويسمى حقل غالوا أحياناً **بحقل الانشطار**.

● **زمرة غالوا:**

إذا كان F^* حقل غالوا لكثير الحدود p بالنسبة للحقل F فإن **زمرة غالوا**

على p بالنسبة لـ F هي الزمرة المكونة من كل التماثلات الذاتية a على $F^{\bullet}$ بحيث $a(x) = x$ لكل $x\epsilon F$. وزمرة غالوا متماثلة مع زمرة تبديلات أصفار p.

● **نظرية غالوا:**

وتنص على أن أي حقلين لغالوا $F_1^{\bullet}$ و $F_2^{\bullet}$ على كثيري الحدود p_1 و p_2 بالنسبة للحقلين F_1 و F_2 يكونان متماثلين بتماثل α والذي له الخاصية $\phi(\alpha) = \alpha'$ لكل $\alpha\epsilon F$. وبصورة خاصة: أي حقلين لغالوا على نفس كثير الحدود بالنسبة لحقل معين يكونان متماثلين بتماثل يترك كل عنصر في F ثابتاً. ومن هذه النظرية نستنتج أن زمرة غالوا على كثير الحدود p بالنسبة لحقل F تكون قابلة للحل إذا كانت المعادلة $p(x) = 0$ قابلة للحل في F بواسطة جذور. وهذا يؤدي إلى أنه لا يوجد معادلة خماسية الدرجة لا يمكن حلها بالجذور.

غالون — **GALON**

هو مقياس للحجم ويساوي 4 كورات أو 231 بوصة مكعبة أو 3.7853 لترات. أما الغالون الامبراطوري فيساوي 277.418 بوصة مكعبة أو 4.5460 لترات.

غاليلي، (غاليليو) — **GALILEI, GALILEO (1564-1642)**

هو فلكي ورياضي وفيزيائي إيطالي، ويعتبر بحق مؤسس الفيزياء الحديثة. وهو أول من فند النظرية القائلة بأن الأجسام الثقيلة تسقط بسرعة أكبر من الأجسام الخفيفة. وهو الذي اكتشف أن الأجسام التي تسقط بحرية يحكمها القانون: $S = \frac{1}{2} gt^2$

حيث s المسافة المقطوعة و t الزمن المستغرق و g تسارع الجسم الناشىء عن الجاذبية الأرضية، كما بين أن القذائف تتحرك على منحنيات قطع مكافىء.

وقد عرف أن بالامكان وضع مربعات الأعداد الصحيحة في تقابل مع الأعداد الصحيحة ولكنه استنتج خطأ أنه لا يمكن القول بأن عدداً لا منته ما أكبر من عدد لا منته آخر. ولقد اضطهد لإيمانه بنظرية كوبرنيكوس الفلكي البولندي والقائلة بأن الأرض والكواكب السيارة تدور حول الشمس.

الحرف الثالث في الأبجدية اليونانية ويرمز له بالحرف الصغير γ والحرف الكبير Γ.

● **توزيع غاما** (إحصاء):

نقول أن المتغيرالعشوائي X يتبع **توزيع غاما** إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} (X - \delta)^{\alpha - 1} e^{-(x - \delta)/\beta},\ x>\delta$$

حيث $\alpha>0$ و $\beta>0$ و $-\infty<\delta<\infty$ ثوابت اختيارية تسمى: α **وسيط الهيئة** و β **وسيط السلم** و δ **وسيط المحل**. إن الدالة المولدة للعزوم لتوزيع غاما، هي: : $M(t) = e^{\delta t}(1 - \beta t)^{-\alpha}$]، $t<\frac{1}{\beta}$. ويكون وسط التوزيع $E(X) = \delta + \alpha\beta$ وتباين التوزيع $var(X) = \alpha\beta^2$. وإذا جعلنا $\alpha = 1$ نحصل على ما يسمى **بالتوزيع الأسي** $x>\delta$، $f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-(x-\delta)/\beta}$ الذي يكون وسطه $\delta + \beta$ وتباينه β^2. والأكثر شيوعاً هو توزيع غاما بوسيطين فقط α و β، وذلك بجعل $\delta = 0$. وينتج عن ذلك توزيع غاما (بوسيطين) $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$, $x>0$ الذي تكون دالته المولدة للعزوم $M(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$ ووسطه $\alpha\beta$، وتباينه $\alpha\beta^2$. ويسمى هذا التوزيع أيضاً باسم **توزيع إيرلانغ**. وتجدر الإشارة إلى أن توزيع مربع كاي هو حالة خاصة من توزيع غاما بوسيطين. فإذا جعلنا $\alpha = \frac{n}{2}$ حيث $n>1$ عدد صحيح و $\beta = 2$ في دالة توزيع غاما تنتج دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مربع كاي.

انظر كاي ــ توزيع مربع كاي.

● **دالة غاما**:

هي الدالة $\Gamma(x)$ و $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-dt}$ لأجل x عدد حقيقي أكبر من صفر أو عدد عقدي جزؤه الحقيقي أكبر من صفر. ومن خواص هذه الدالة أن

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ و $\Gamma(1) = 1$. وإذا كان n عدداً صحيحاً أكبر من صفر، فإن $\Gamma(n) = (n-1)!$. كذلك فإن $\Gamma(^1/_2) = \sqrt{\pi}$ و $\Gamma(^3/_2) = {}^{1/2}\sqrt{\pi}$. ولدالة غاما امتداد تحليلي يكون مجاله مجموعة كل الأعداد العقدية عدا الصفر والأعداد الصحيحة السالبة. ويعرف هذا الامتداد باستخدام الصيغة $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ أو $\Gamma(z) = [ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \{1 + \frac{z}{n}\} e^{-z/n}]^{-1}$، حيث تمثل γ ثابت أويلر.

ونعرف دوال غاما غير التامة بالصيغ:

$$\gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

ويتبع هذين التعريفين، أن:

$$\Gamma(a) = \gamma(a,x) + \Gamma(a,x)$$

$$\gamma(a+1, x) = a\,\gamma(a,x) - x^a e^{-x}$$

$$\Gamma(a+1, x) = a\,\Gamma(a,x) + x^a e^{-x}$$

$$\gamma(a,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{a+n}/n!\,(a+n)$$

غامر SURJECTIVE

● **دالة غامرة:**

نفس تطبيق غامر.

غاوس، كارل فريدريك GAUSS, CARL FRIEDRICH (1777-1855)

رياضي ألماني يعتبر أحد أعظم ثلاث رياضيين عبر التاريخ وذلك إلى جانب أرسطو ونيوتن. أسهم بشكل مهم في حقول الجبر والتحليل والهندسة ونظرية الأعداد والتحليل العددي والاحتمال والإحصاء كما أسهم أيضاً في الفلك والفيزياء. انظر أولي ـ مبرهنة العدد الأولي.

● **برهان غاوس لمبرهنة الجبر الأساسية:**

هو أول برهان معروف لهذه المبرهنة. وهو برهان هندسي يعتمد على

وضع عدد عقدي $a + bi$ لمجهول المعادلة ثم فصل الأجزاء الحقيقية عن الأجزاء التخيلية في النتيجة وإثبات أن الدالتين الناتجتين في a و b تكونان صفراً لإحدى قيم a وإحدى قيم b.

انظر أساسي ـ مبرهنة الجبر الأساسية.

● **توزيع غاوسي:**

ويعني توزيعاً طبيعياً.

انظر طبيعي.

● **صيغ غاوس (أو مشابهات دولامبر):**

إذا كان ABC مثلثاً كروياً زواياه A,B,C وأضلاعه المقابلة على الترتيب هي a,b,c فإن صيغ غاوس هي العلاقات التالية:

$$\cos {}^1/_2\, c \sin {}^1/_2\, (A + B) = \cos {}^1/_2\, C \cos {}^1/_2\, (a - b)$$

$$\cos {}^1/_2\, c \cos {}^1/_2\, (A + B) = \sin {}^1/_2\, C \cos {}^1/_2\, (a + b)$$

$$\sin {}^1/_2\, c \sin {}^1/_2\, (A - B) = \cos {}^1/_2\, C \sin {}^1/_2\, (a - b)$$

$$\sin {}^1/_2\, c \cos {}^1/_2\, (A - B) = \sin {}^1/_2\, C \sin {}^1/_2\, (a + b)$$

● **عدد صحيح غاوسي:**

انظر عدد صحيح.

● **مبرهنة غاوس:**

وهي المبرهنة الشهيرة التي تقول إن التقوس الكلي لأي سطح هو دالة معتمدة على المعاملات الأساسية من المرتبة الأولى للسطح ومشتقاتها الجزئية من المرتبتين الأولى والثانية.

انظر معادلة غاوس.

● **مبرهنة غاوس الأساسية في علم السكون الكهربائي:**

إذا أخذنا المركبة الناظمة الخارجة للشدة الكهربائية وكاملناها على سطح مغلق كل نقاطه عديمة الشحنة، فإن النتيجة تكون 4π ضرب الشحنة الكلية المحصورة على السطح.

وفي المبرهنة المماثلة في حقل الجاذبية فإن الثابت يكون -4π.

● **مبرهنة غاوس ـ بونيه (في الهندسة التفاضلية):**

إذا كان s جزءاً بسيط الاتصال من سطح تقوسه k مستمر وإذا كان التقوس الجيوديزي k لخط الكفاف C مستمراً أيضاً، فإن $\int_C k\,ds + \int\int_S k\,dA = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \theta_i$ ، حيث أن $\theta_1,\dots,\theta_n$ هي الزوايا الخارجة (إن وجدت) عند رؤوس C.

● **مبرهنة القيمة الوسطى لغاوس:**

لتكن u دالة نظامية توافقية في منطقة R. ولتكن P نقطة في R و S كرة مركزها عند P وتقع بكليتها في R (أي نقاطها الداخلية وحدودها) إذا كانت A مساحة S فإنه:

$$u(P) = \frac{1}{A} \int\int_S u\,ds$$

وإذا كانت R منطقة في مستوى و C دائرة محيطها c فالمعادلة تصبح:

$$u(P) = \frac{1}{c} \int_C u\,ds$$

● **مستوى غاوس:**

ويقصد به المستوى العقدي.

● **معادلة غاوس (في الهندسة التفاضلية):**

هي معادلة تعطي التقوس الكلي $k = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}$ بدلالة المعاملات الأساسية من المرتبة الأولى E,F,G ومشتقاتها الجزئية من المرتبتين الأولى والثانية:

$$k = \frac{1}{2H} \{ \frac{\partial}{\partial u} [\frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial V} - \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial u}] + \frac{\partial}{\partial V} [\frac{2}{H} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H} \frac{\partial E}{\partial V} - \frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial u}] \}$$

حيث $H = \sqrt{EG - F^2}$ أما إذا استعملنا رموز كريستوفل، فإن معادلة غاوس تصبح:

$$K = \frac{1}{H} \{ \frac{\partial}{\partial u} (\frac{H}{G} [{}^{2\,2}_{\;1}]) - \frac{\partial}{\partial V} (\frac{H}{G} [{}^{1\,2}_{\;1}]) \}$$

$$= \frac{1}{H} \{ \frac{\partial}{\partial v} (\frac{H}{E} [{}^{1\,1}_{\;2}]) - \frac{\partial}{\partial u} (\frac{H}{E} [{}^{1\,2}_{\;2}]) \}$$

وباستعمال ترميز الموترات فإن المعادلة تكون $x^i,_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} X^i$. أما إذا استخدمنا الوسيطات المتحاررة (أو وسيطات التحارر) $E = G = \lambda(u,v), F = 0$، فإنه يمكن اختزال المعادلة إلى ما يلي:

$$k = \frac{-1}{2\lambda} [\frac{\partial^2 \text{Log}\, \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \text{Log}\, \lambda}{\partial v^2}]$$

وباستخدامنا الوسيطات الجيوديزية $E = 1,\ F = 0,\ G = [\mu (v,v)]^2$ حيث $\mu \geq 0$ فإن هذه المعادلة تصبح: $k = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}$

انظر مبرهنة غاوس أعلاه وكودازي ــ معاملات كودازي.

● **معادلة غاوس التفاضلية:**

انظر فوهندسي ــ معادلة تفاضلية فوهندسية.

غراد — GRAD

والغراد يساوي واحداً بالمائة من الزاوية القائمة في النظام الجزئمئوي لقياس الزوايا. وتسمى الغراد أحياناً درجة.

غراسمن، هرمن غنشر — GRASMAN, HERMAN GHINSHER (1809-1877)

● **منطوى غراسمن:**

لنأخذ الفضاء الإقليدي R^{n+p} باعتباره فضاء متجهات بعديته $n + p$ وعليه جداء داخلي يجعل الأساس الطبيعي متعامداً معيراً. ولنأخذ $G(n,p)$ مجموعة الفضاءات الجزئية الخطية ذات البعدية n في R^{n+p} والزمرة التعامدية $0(n + p)$ والتي تؤثر على R^{n+p} تؤثر على $G(n,p)$ أيضاً وبشكل متعد. أما عناصر $0(n + p)$ التي تحفظ فضاء معيناً R^n أي التي تأخذه إلى نفسه) تشكل زمرة جزئية هي $0(n) \times 0(p)$ وبذلك يكون $G(n,p)$ هو فضاء القسمة:

$$G(n,p) = 0(n + p) / 0(n) \times 0(p)$$

ويسمى المنطوى $G(n,p)$ بمنطوى غراسمن.

● **علاقة غراسمن:**

ليكن E فضاء متجهات بعديته n ولنأخذ V و W فضاءين جزئيين بعديتهما q,p على الترتيب. وإذا كانت بعدية التقاطع $v \cap w$ هي العدد r وبعدية الفضاء $v + w$ هي العدد s فإن علاقة غراسمن هي المعادلة:

$$p + q = s + r$$

غرام GRAM

هو وحدة الوزن في النظام المتري وهويساوي واحداً من الألف من الكيلوجرام القياسي من البلاتينيوم المحفوظ في باريس. وكان المقصود في البداية أن يكون الغرام مساوياً لوزن واحد سنتمتر مكعب من الماء عند درجة حرارة °4 مئوية (وهي الحرارة التي تكون عندها كثافة الماء قيمة عظمى). وهذا يقرب كثيراً من الصحة.

غرام، جورغن بيدريرسون:

هو رياضي دانماركي اشتغل في حقلي التحليل ونظرية الأعداد.

● **عملية غرام ـ شميت:**

هي عملية تشكيل متتالية **متعامدة** $\{y_n\}$ من متتالية مستقلة خطياً $\{x_n\}$ تتكون من عناصر فضاء جداء داخلي وذلك بتعريف y_n بطريقة استقرائية كالتالي:

$$y_1 = x_1,\ y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x_n,y_k)}{\|y_k\|^2} y_k,\ n \geq 2$$

علمًا بأن (x_n,y_n) يعني الجداء الداخلي. وللحصول على متتالية متعامدة معيرة فإننا نستبدل y_n بـ $\frac{y_n}{\|y_n\|}$ أو نستخدم المتتالية المساعدة $\{u_n\}$ والصيغ التالية:

$$u_1 = x_1,\ y_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},\ u_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n,y_k)\, y_k,\ \ y_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

وإذا كان الجداء الداخلي عقدي القيمة وكان $(ax,y) = \bar{a}(x,y)$ فإننا يجب أن نستبدل (x_n,y_k) بـ $\overline{(x_n,y_k)}$ في جميع هذه الصيغ.

انظر **داخلي** ــ فضاء جداء داخلي.

غرامية GRAMIAN

(1) لنفرض أن $X = \{u_1,u_2,...,u_n\}$ مجموعة من المتجهات في فضاء متجهات بعديته n وأن المصفوفة $G = [g_{ij}]$ حيث $g_{ij} = u_i.u_j$، حيث $u_i.u_j$ الجداء السلمي للمتجهين u_i و u_j (أو **الجداء السلمي الهرميتي** إذا كان المتجهان u_i و u_j مركبات عقدية أو $u_i.u_j = (u_i,u_j)$ الجداء الداخلي بشكل عام). وتعرف **غرامية** X بأنها معين المصفوفة G. وتكون المجموعة X تابعة خطياً إذا وفقط إذا كانت **غرامية** X تساوي الصفر.

(2) وتعرف غرامية المجموعة $X = \{ \phi_1,\phi_2,...,\phi_n \}$ من الدوال بـأنها معين المصفوفة $G = [g_{ij}]$ حيث X , $g_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, d\Omega$ وتكون غرامية X مساوية للصفر إذا وفقط إذا كانت X تابعة خطياً وحققت الدوال ϕ_i بعض الشروط في منطقة التكامل Ω مثل:

(أ) أن تكون كل الدوال ϕ_i مستمرة.

(ب) أو أن تكون كل دالة ϕ_i قابلة للقياس (ليبيغ) وأن تكون $|\phi_i|$ قابلة للمكاملة (ليبيغ).

(ونذكر القارىء أن X تكون تابعة خطياً إذا وجدت الأعداد $a_n,...,a_2,a_1$ ليست كلها مساوية للصفر بحيث $\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i = 0$ أينما كان تقريباً.

والجدير بالذكر هنا أنه تحت الشرط (ب) فإن الغراميات (1) و(2) تتكافأ إذا اعتبرنا المتجهات والدوال كعناصر في **فضاء هلبرت**.

غربال SIEVE

● **غربال عددي**:

أداة ميكانيكية للمساعدة في تحليل الأعداد الكبيرة. انظر **ايراتوسثينس**.

● **غربال ايراتوسثينس:**

انظر ايراتوسثينس.

EXTRANEOUS **غريب**

● **الجذر الغريب:**

هو عدد نحصل عليه أثناء عملية حل معادلة معينة، بحيث لا يكون هذا العدد جذراً للمعادلة المعنية. ونحصل على الجذر الغريب في العادة بتربيع المعادلة الأصلية أو بضربها بدالة للمتغير.

مثال (1): للمعادلـة $(x^2 - 3x + 2) / (x - 2) = 0$ جذر واحـد فقط هو العدد 1، ولكن إذا ضربنا طرفي المعادلة بالكمية $(x - 2)$ فإننا نحصل على المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ والتي لها الجذران 1 و 2 ويسمى 2 بـ **الجذر الغريب** للمعادلة الأصلية.

مثال (2): للمعادلة $\sqrt{x} = x - 2$ جذر واحد هو العدد 4. وإذا ربعنا طرفي المعادلة نحصل على $x^2 - 5x + 4 = 0$ والتي لها الجذران 4 و 1 فيسمى الجذر 1 بـ**الجذر الغريب** للمعادلة الأصلية.

GREGORY, JEMES (1638-1675) **غريغوري، جيمس**

هو عالم اسكتلندي اشتغل في الفلك والتحليل والجبر.

● **صيغة غريغوري ـ نيوتن:**

هي صيغة **للاستكمال**. إذا كانت $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ قيماً متتالية للمتغير المستقل وكانت $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ قيم الدالة المقابلة، فإن صيغة الاستكمال تأخذ الشكل:

$$(1) \qquad y = y_0 + k\Delta_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta_0^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta_0^3 + \ldots,$$

حيث تقع $k = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

بين x_0 و x_1 و

$$\Delta_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta_0^2 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta_0^2 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

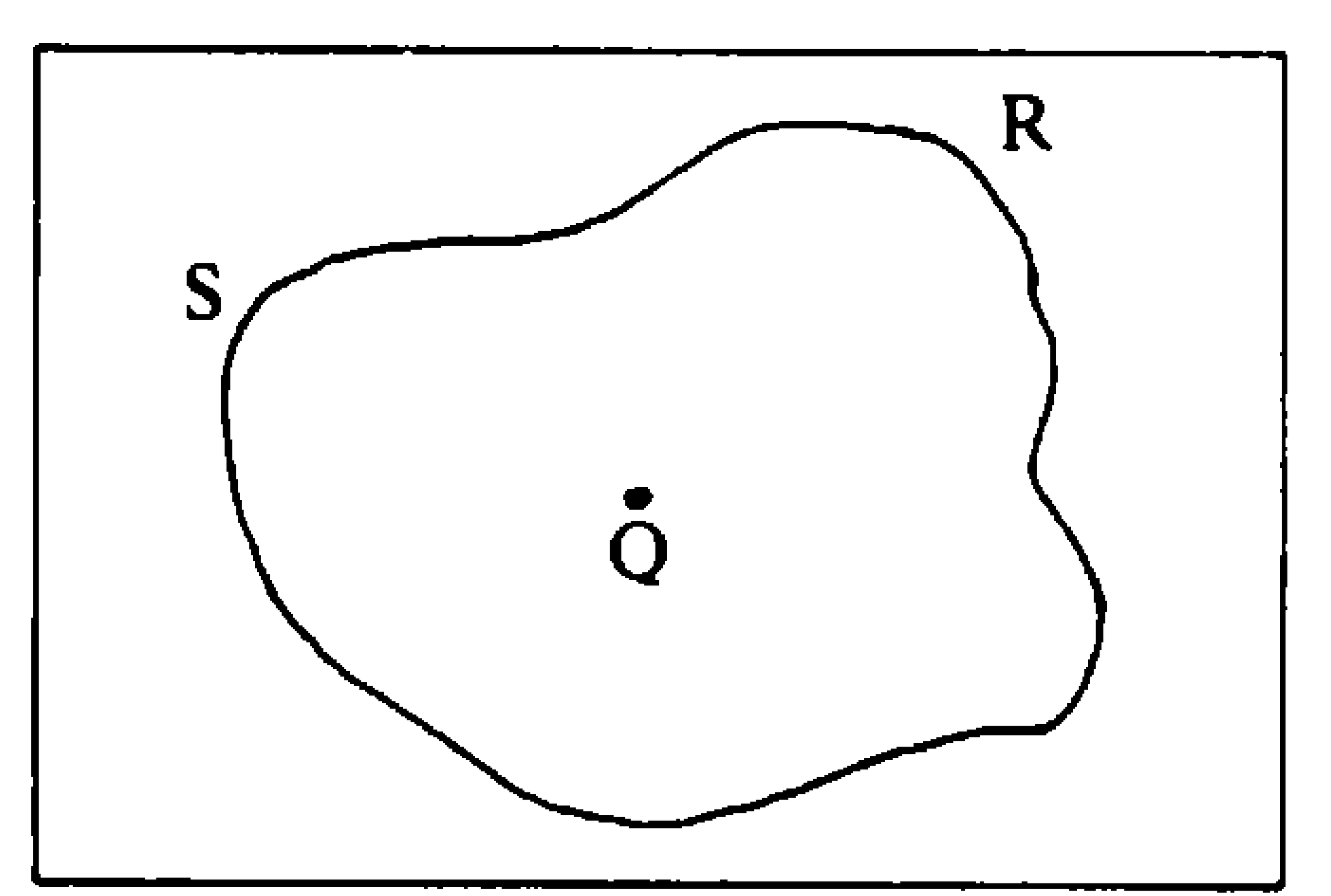
أما معاملات Δ_0^n فهي معاملات ثنائي الحد من المرتبة n. وإذا أسقطت جميع الحدود في (1) ماعدا الحدين الأول والثاني فإن المعادلة الناتجة $y = y_0 + \left(\frac{y - y_0}{x_1 - x_0}\right)(y_1 - y_0)$ فهي الصيغة الاعتيادية للاستكمال والمستخدمة في جداول اللوغاريتمات والجداول المثلثية واستخراج الجذور.

GREEN, GEORGE (1793-1841) غرين، جورج

هو رياضي إنجليزي اهتم بالتحليل والرياضيات التطبيقية.

● دالة غرين:

لنفرض أن R منطقة لها سطح حدودي S وأن Q نقطة داخلة في R فإن دالة غرين G(P,Q) تعرف بأنها دالة على الشكل $G(P,Q) = \frac{1}{4\pi r} + V(P)$ حيث r المسافة PQ و V(P) دالة توافقية و G تساوي الصفر على جميع نقاط S.



● صيغ غرين:

$$(1) \qquad \int_V u\, \nabla^2 u\, dV + \int_V \nabla u . \nabla u\, dV = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma;$$

$$(2) \qquad \int_V u\, \nabla^2 v\, dV + \int_V \nabla u . \nabla v\, dV = \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma;$$

$$(3) \qquad \int_V u\, \nabla^2 v\, dV - \int_V \nabla^2 u\, dV = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma.$$

وتستخرج الصيغة (2) من مبرهنة غرين $\int_V V.\phi\, dV = \int_S \phi.n\, d\sigma$

وذلك بوضع $\phi = u\,\nabla v$، وبذلك يكون $\nabla.\phi = u\,\nabla^2 v + \nabla u.\nabla v$. أما الصيغة (1) فهي حالة خاصة من (2) وذلك بوضع $u = v$ ونحصل على الصيغة (3) بتبديل u و v في الصيغة (2) ثم الطرح. وتؤخذ التكاملات على الحجم على مجموعة V تحقق مبرهنة التباعد أما التكاملات على السطح فتؤخذ على الحدود S للمجموعة V. أما $\frac{\partial u}{\partial n}$ فترمز للمشتق الاتجاهي لـ u في اتجاه الناظم الخارجي للسطح، أي أن $\nabla u.n = \frac{\partial u}{\partial n}$ حيث n وحدة الناظم الخارجي.

● **مبرهنة غرين:**

(1) **في المستوى:** لنفرض أن R مجموعة مفتوحة ومحدودة في المستوى حدودها S منحن بسيط مغلق وقابل للقياس. إذا كان S أملس جزءاً جزءاً فإن مبرهنة غرين تؤكد صحة المعادلة $\int_C L\,dx + M\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA$

حيث يفترض أن L و M دالتان مستمرتان على R و C وأن تكون الدالتان $\frac{\partial L}{\partial y}$ و $\frac{\partial M}{\partial x}$ مستمرتين ومحدودتين على R.

والجدير بالذكر أن مبرهنة غرين حالة خاصة من مبرهنة ستوك عندما يقع السطح في المستوى - xy.

انظر **تكامل ــ تكامل على خط**.

(2) **في الفضاء:** نفس مبرهنة التباعد.

انظر **مبرهنة التباعد**.

غطاء COVER

يعرف غطاء المجموعة X بأنه أية عائلة من المجموعات الجزئية لـ X بحيث تنتمي كل نقط في X لمجموعة واحدة على الأقل من هذه المجموعات. وبصورة أوضح تكون العائلة $\zeta = \{W\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ المكونة من مجموعات جزئية من X غطاء لـ X إذا كان $X \subset \cup\{W\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ ويسمى الغطاء ζ مفتوحاً (مغلقاً) إذا كانت المجموعات المكونة له $W\alpha$ مفتوحة (مغلقة). ويعرف غطاء ϵ لفضاء المقاس (X,d) بأنه غطاء لـ X مكون من عدد منته من المجموعات قطر كل منها

أقل من ϵ. (انظر قطر ـ قطر المجموعة). ويكون غطاء ϵ من مرتبة n إذا كانت هناك نقطة محتواة في n من مجموعات الغطاء ولا يوجد أية نقطة محتواة في $n + 1$ من مجموعات الغطاء.

انظر فيتالي ـ غطاء فيتالي.

ENVELOPE غلاف

- **غلاف عائلة من السطوح وحيدة الوسيط:**

هي السطح المماس لكل عضو في العائلة على مميزه، أي أنه المحل الهندسي للمنحنيات المميزة للعائلة.

انظر مميز ـ مميز عائلة من السطوح وحيدة الوسيط.

- **غلاف عائلة من المستقيمات وحيدة الوسيط:**

هو المنحنى المماس لكل عضو في العائلة. فمثلاً المعادلة $y = -\frac{1}{2}cx + c + \frac{1}{8}c^3$ تمثل عائلة من المستقيمات، وللحصول على الغلاف نحذف c بين المعادلتين:

$$(1) \qquad F(x,y,c) = y + \frac{1}{2}cx - c - \frac{1}{8}c^3 = 0.$$

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{3}{8}c^2 = 0.$$

فنحصل على $c^2 = {}^4\!/_8\,(x - 2)$ وبالتعويض عن c في المعادلة (1) نستنتج أن $4(x - 2)^3 = 27y^2$ وهي معادلة غلاف عائلة من المستقيمات.

- **غلاف عائلة من المنحنيات وحيدة الوسيط:**

هو المنحنى المماس لكل منحن في العائلة. ويتم الحصول على معادلة الغلاف بحذف الوسيط من معادلة العائلة والمشتق الجزئي لهذه المعادلة بالنسبة للوسيط. وهكذا فالمعادلة $F(x,y,a) = (x - a)^2 + y^2 - 1 = 0$ تمثل عائلة من الدوائر مركزها (a,o) ونصف قطرها يساوي 1 حيث a وسيط متغير وباشتقاق معادلة الدوائر بالنسبة للوسيط نجد $\frac{\partial F}{\partial a} = -2(x - a) = 0$ ومنها نستنتج أن $x = a$. وبالتعويض في معادلة العائلة نجد أن $y = \pm 1$، وهي معادلة غلاف العائلة. انظر تفاضل ـ حل المعادلة التفاضلية.

CLOSURE غُلاقة

● غلاقة مجموعة من النقاط:

غلاقة المجموعة A هي مجموعة $\bar{A}$ تحتوي على A وعلى كل نقاط تراكم A. وتكون الغلاقة دائمًا مجموعة مغلقة. والحقيقة أن $\bar{A}$ هي أصغر مجموعة منطقة تحتوي على A. إذا كانت A مجموعة مغلقة فإن $A = \bar{A}$ مجموعة نقاط التراكم A' للمجموعة A تسمى مجموعة A المشتقة. وهكذا تكون غلاقة A عبارة عن اتحاد A مع A'.

غَمْر:

ليكن M و N منطويين تفاضليين بعديهما m و n على الترتيب $(m \geq n)$. نقول عن الدالة $\phi:M \to N$ القابلة للتفاضل بأنها غمر إذا كانت رتبتها عند كل نقطة تساوي n، أي إذا أخذنا التفاضل $\phi_{*m}:T_mM \to T_{\phi(m)}N$ عند أي نقطة $m \in M$ فإن هذا التفاضل يكون تطبيقاً خطياً غامراً $\phi_{*m}(T_mM) = T_{\phi m}N$ مثلاً الدالة $\phi:R^2 \to R$ المعرفة بواسطة $\phi(x,y) = x - y$ تكون غمراً لأن تفاضلها ϕ_* عند أي نقطة معرف بواسطة المصفوفة $[1, -1]$ ورتبتها 1. ومن المعروف أن دالة الغمر تكون دالة مفتوحة بالنسبة للبنى الطوبولوجية المعطاة من قبل أطلسي المنطويين، كما أنه إذا كان $m > n$ وكانت x نقطة في مدى ϕ فإن $\phi^{-1}(x)$ يكون هو منطوٍ جزئي من M وبعديته تساوي $m - n$. ويقال عن هذا المنطوي الجزئي أنه الليف فوق x.

IMMERSION غَمْس

والغمس تطبيق قابل للمفاضلة f من منطو تفاضلي M إلى منطو تفاضلي M' بحيث يكون تفاضل f عند كل نقطة في M متبايناً، أي أنه إذا كانت m بعدية M و m' بعدية M' فإن رتبة التطبيق الخطي: $f_{*p}:T_pM \to T_{f(p)}M'$ تكون m. وإذا كان $f:M \to M'$ غمساً فإننا نقول بأن M مغموس في M' كمنطو جزئي.

GUDERMANN, CHRISTOF (1798-1852) غودرمان، كريستوف

هو رياضي ألماني، اشتغل في الهندسة والتحليل.

● **الغودرمانية:**

هي الدالة u في المتغير x والمعروفة بالعلاقة $\tan u = \sin h\ x$ ويرمز لها بالرمز $gd\ x$. كما تحقق u و x العلاقتين $\cos u = \mathrm{sech}\ x$ و $\sin u = \tanh x$.

GODEL, KURT (1906-) غوديل، كورت

هو رياضي تشيكوسلوفاكي ـ أميركي اشتغل في المنطق والفلسفة. ولقد برهن أن **موضوعة الاختيار** و**فرضية الالتحام** متسقتان مع الموضوعات الاعتيادية لنظرية المجموعات. كما برهن على أن اتساق نظام منطقي ما لا يمكن إثباته من داخل النظام.

GOLDBACH, CHRISTIAN (1690-1764) غولدباخ، كريستيان

هو رياضي، ولد في بروسيا وعاش في عدة بلدان أوروبية غربية قبل أن يستقر في روسيا. وكان من جملة اهتماماته نظرية الأعداد والتحليل.

● **مخمنة غولدباخ:**

وتنص هذه المخمنة على أن كل عدد زوجي (باستثناء 2) يساوي مجموع عددين أوليين. ولهذه اللحظة لم يستطع أحد البرهنة على صحة أو خطأ هذه المخمنة.

GHOMBERTIZ, B. (1865-1779) غومبيرتز، بنجامين

هو خبير تأمين إنجليزي وعالم في الفلك والتحليل.

● **منحنى غومبيرتز:**

هو منحنى معادلته $\mathrm{Log}\ y = \mathrm{Log}\ k + (\mathrm{Log}\ a)\ b^x$ أو $y = k\ a^{b^x}$ حيث $0<a<1$ $0<b<1$. نلاحظ أن قيمة y عندما تكون $x = 0$ تساوي ka كما أن $y \to k$ عندما $x \to \infty$.

غير تام INCOMPLETE

● **دوال بيتا β وغاما γ غير التامة:**

انظر بيتا β وغاما γ.

● **الاستقراء غير التام:**

انظر استقراء ـ الاستقراء الرياضي.

غير قابل للاختزال IRREDUCIBLE

● **الحالة غير القابلة للاختزال في صيغة كاردانو لجذور المعادلة التكعيبية:**

انظر كاردانو ـ حل كارادانو للمعادلةالتكعيبية.

● **المصفوفات والتحويلات غير القابلة للاختزال:**

انظر تحت قابل للاختزال.

● **حلقة غير قابلة للاختزال:**

انظر حلقية.

● **كثير حدود غير قابل للاختزال:**

هو كثير حدود لا يمكن وضعه على صورة جداء كَثيرَيْ حدود درجتهما أكبر أو يساوي 1 ومعاملاتهما عناصر في حقل أو مجال معطى.

مثال: يكون كثير الحدود $x^2 + 1$ غير قابل للاختزال في حقل الأعداد الحقيقية. ولكنه يكون **قابلاً للاختزال** في حقل الأعداد العقدية حيث يكون:

$$i^2 = -1, x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

وفي الجبر الابتدائي يطلق اسم **كثير الحدود غير قابل للاختزال** على أي كثير حدود لا يمكن تحليله إلى عوامل $(x - a)$ بحيث تكون a عدداً منطقاً.

وإذا سمحنا للمعاملات بأن تكون أعداداً عقدية، فإننا نستنتج من **المبرهنة الأساسية للجبر** بأن أي كثير حدود غير قابل للاختزال لا بد وأن يكون من الدرجة الأولى.

وإذا كان p كثير حدود معاملاته في الحقل F فإنه إما أن تكون p غير قابلة للاختزال أو أنه يمكن كتابتها على صورة جداء كثيرات حدود غير قابلة للاختزال. ويكون هذا الجداء وحيداً (باستثناء الاختلاف في العوامل الثابتة وفي ترتيب العوامل).

انظر **مجال** ــ المجال الكامل، وانظر كذلك إيزنشتين.

● **الجذر غير القابل للاختزال:**

هو جذر لا يمكن كتابته على صورة منطقة مكافئة له. فالجذور $\sqrt{21}$ و$\sqrt{6}$ و $\sqrt{x}$ غير قابلة للاختزال. أما الجذران $\sqrt{4}$ و $\sqrt[3]{x^3}$ فقابلان للاختزال لأن $\sqrt{4} = 2$ و $\sqrt[3]{x^3} = x$.

غير قابل للقيس المشترك — INCOMMENSURABLE

أي ليس لهما قياس مشترك. وبصورة أخرى ليس لهما وحدة مشتركة بحيث يكون كل منهما مضاعفاً كاملاً لهذه الوحدة.

فمثلاً يكون العددان a و b **غير قابلين للقيس المشترك** إذا لم يوجد عدد x بحيث يكون كل من b,a مضاعفاً كاملاً للعدد x أي $a = mx$ و $b = nx$.

مثال: العددان $\sqrt{2}$ و 3 غير قابلين للقيس المشترك لأنه إذا كان هناك x بحيث $3 = nx$ و $\sqrt{2} = nx$ فإن $\sqrt{2} = 3\frac{m}{n}$. وهذا غير صحيح، لأن 2 عدد غير منطق.

وتكون قطعتا مستقيم غير قابلتين للقيس المشتركة إذا كان طولاهما عددين غير قابلين للقيس المشترك.

غير، لا — NON

هي سابقة تستخدم بمعنى النفي.

● **انقطاع غير قابل للإزالة:** انظر انقطاع.

● **تحويل خطي لا منفرد:** هو تحويل خطي معينه لا يساوي الصفر.

- **عشري لا دوري**: انظر عشري.
- **لا خطي**: انظر خطي ـ تحويل خطي.
- **لا دوري**: انظر دوري.
- **لا منته**: انظر عشري.
- **مجموعة لا كثيفة**: انظر كثيف.
- **هندسة لا إقليدية**: انظر هندسة ـ هندسة إقليدية.

غير مباشر INDIRECT

- **المفاضلة غير المباشرة**:

هي مفاضلة دالة الدالة باستخدام الصيغة: $\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

وتسمى هذه الصيغة بقاعدة السلسلة.

انظر سلسلة.

- **البرهان غير المباشر**:

(1) انظر **برهان** ـ مباشر وغير مباشر.

(2) هو برهان قضية ما وذلك بالقيام أولاً بإثبات مبرهنة أخرى نستطيع منها استنتاج القضية المطلوب برهانها.

غير متحيز UNBIADED

لتكن $X_1, x_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية مختارة من توزيع احتمالي $f(x;\theta)$ حيث θ وسيط التوزيع ويقع في فضاءالوسيط Ω. نقول أن الإحصاءة $u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ **هي مقدَّر غير متحيز للوسيط** θ إذا كان $E(u) = \theta$ لكل $\theta\epsilon\Omega$. وإلا فنقول إن u **مقدر متحيز** للوسيط θ. ونعرف **التحيز** بالمقدار $E(u)-\theta$ كما نقول إن $u-\theta$ **غير متحيز تقاربياً** إذا كان $\lim_{n\to\infty} E(u) = \theta$. ونقول إن u **تقدير غير متحيز وذو تباين أصغر للوسيط** θ إذا كان $E(u) = \theta$ لكل $\theta\epsilon\Omega$ وكان $Var(u) \leq Var(u^*)$ حيث u^* أي مقدر غير متحيز آخر للوسيط θ (Var تعني تباين).

● اختبار غير متحيز:

انظر فرض ـ اختبار الفرض.

غير متسق — INCONSISTENT

● المعادلات غير المتسقة:

هي معادلات لا تحققها أية مجموعة من قيم المتغيرات أي أنها معادلات غير متسقة أو غير منسجمة.

انظر اتساق.

مثال: المعادلتان $x + y = 2$ و $x + y = 3$ معادلتان غير متسقتين.

● الموضوعات غير المتسقة:

انظر موضوعة.

غير محدد — INDEFINITE

● التكامل غير المحدد:

انظر تكامل ـ التكامل غير المحدد.

غير محدود — UNBOUNDED

● دالة غير محدودة:

دالة يمكن أن نجد لها قيمة أكبر من أي عدد معطى M. فنقول إن f دالة غير محدودة على المجموعة S إذا كان يوجد لكل عدد M نقطة x_n في S بحيث $|f(x_n)| > M$. مثلاً: الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ غير محدودة على الفترة $0 \le x \le 1$.

والدالة $f(x) = \tan x$ غير محدودة على الفترة $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$.

غير مشروط — UNCONDITIONAL

● متباينة غير مشروطة:

انظر متباينة.

غير معرف UNDEFINED

● **حد غير معرف:**

حد يستخدم بدون تعريف رياضي خاص. أو حد يحقق موضوعات معينة ولكن بدون تعريف.

غير معين UNDETERMINED

● **معاملات غير معينة:**

هي مجاهيل يتم تعيينها لتحقق شروطاً خاصة.

مثال: لدينا المعادلة $x^2 + ax + 2 = 0$ ونريد تعيين a ليكون لهذه المعادلة جذران متساويان. هنا a هي معامل غير معين، أما الشرط فهو $a^2 - 8 = 0$، أي $a = \mp 2\sqrt{2}$.

● **طريقة المعاملات غير المعينة لحل معادلة تفاضلية:**

وهي طريقة تستخدم من أجل إيجاد حل خاص للمعادلةالتفاضلية وذلك بوضع صورة معينة للحل ذات معاملات غير معينة يتم معرفتها بالتعويض في المعادلة الأصلية والمطابقة.

انظر **معادلة تفاضلية**.

غير معين INDETERMINATE

● **المعادلة غير المعينة:**

انظر **معادلة** ــ المعادلة غير المعينة.

● **الشكل غير المعين:**

هو تعبير على شاكلة $\infty - \infty$ و $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty . 0$ و 0^0 و ∞^0 و 0.0 و 1^∞ وهي كلها غير معرفة.

ولمزيد من التفاصيل حول إيجاد هذه النهايات انظر **لوبيتال**.

غير منسجم INCOMPATIBLE

● المعادلات غير المنسجمة:

نفس المعادلات غير المتسقة.

غيلفوند، ألكسندر أوسيبوفيتش

GELFOND, ALEXANDER OSIPOIVIC (1968-1906)

هو رياضي روسي اشتغل في حقل التحليل.

● **مبرهنة غيلفوند ــ شنايدر:**

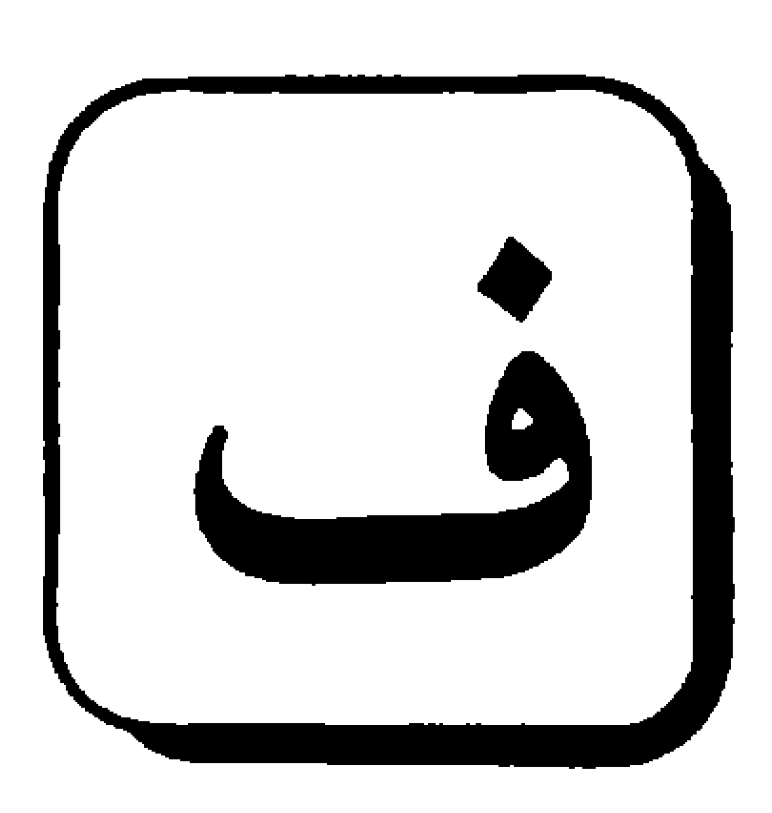
إذا كان α و β عددين جبريين بحيث $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq 1$ و βَ ليس عدداً منطقاً فإن α^{β} يكون متسامياً.

انظر متسام.

ولقد أثبت كل من غيلفوند في 1934 وشنايدر في 1935 هذه المبرهنة كل على حدة وباستقلالية تامة. والمبرهنة تعطي حلاً إيجابياً للمسألة السابعة لهلبرت.

انظر بيكر.





REDUNDANT **فائض**

● **معادلة فائضة:**

انظر معادلة.

● **عدد فائض:**

انظر عدد ـ عدد كامل.

EXCESS **فائض**

● **فائض التسعات:**

هو باقي قسمة عدد صحيح موجب على تسعة. وهو يساوي باقي قسمة مجموع أرقام العدد على تسعة. فمثلاً فائض التسعات في العدد 237 هو العدد 3 لأن $3 + 9 \times 26 = 237$ أو لأن $3 + 9 = 7 + 3 + 2$.

● **الفائض الكروي:**

انظر كروي ـ الفائض الكروي.

FATOU, PIERR (1878-1929) **فاتو، بيير**

رياضي فرنسي اشتغل في حقل التحليل.

● **تمهيدية فاتو:**

لنفرض أن μ مقياس جمعي عدياً على مجموعات جزئية من مجموعة E

قابلة للقياس، وأن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس على E والتي مداها يقع في النظام العددي الحقيقي الممدد. فإن الكميتين $\text{Lim sup } f_n$ و $\text{Lim inf } f_n$ قابلتان للقياس:

(1) وإذا كان يوجد دالة g قابلة للقياس، بحيث $_E\int g d\mu \neq +\infty$ و $f_n(x) \leq g(x)$ لكل n ولكل x في E، فإن:

$$\text{Lim sup } _E\int f_n \, d\mu \leq {}_E\int (\text{Lim sup } f_n) \, d\mu$$

(2) وإذا وجدت دالة h قابلة للقياس، بحيث $_E\int h \, d\mu \neq -\infty$ و $f_n(x) \geq h(x)$ لكل n ولكل x في E، فإن:

$$_E\int (\text{Lim inf } f_n) \, d\mu \leq \text{Lim inf } _E\int f_n \, d\mu$$

فاصل SEPARATRIX

شيء ما يستعمل للفصل بين الأرقام أو بين الرموز. مثلاً فاصلة تستعمل لفصل الأرقام 1,543,280 أو فراغ لفصل الأرقام 280 453 1 حتى الفاصلة العشرية تسمى أحياناً فاصلاً.

فاندرموند، الكسندر ثيوفيل
VANDERMONDE, ALEXANDRE THEOPHILE (1735-1769)

رياضي فرنسي اختص بالجبر، أول من أعطى عرضاً منطقياً لنظرية المعينات.

- **معين فاندرموند:**
  انظر معين.

فانديفر VANDIVER, HARRY SCHULTZ (1882-1973)

رياضي أميركي اختص بالجبر ونظرية الأعداد. عرف بإسهامه في حل مبرهنة فيرما الأخيرة.

فاري، جون FAREY

مهندس مدني إنجليزي وعالم رياضي.

● **متتالية فاري:**

وتعرف متتالية فاري من المرتبة n بأنها المتتالية المتزايدة المكونة من جميع الكسور $\frac{p}{q}$ حيث $1 \geq \frac{p}{q} \geq 0$ و $q \leq n$ وبحيث p و q أعـداد صحيحة لا سالبة ليس بينها قواسم مشتركة غير الواحد.

وكمثال على متتالية فاري نورد المتتالية من المرتبة 5:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

والجدير بالملاحظة هنا أنه إذا كانت $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ثلاثة حدود متتالية في متتالية فاري فإن:

(1) $bc - ad = 1$، و (2) $\frac{c}{d} = (a + e)/(b + f)$ وكان فاري أول من ذكر هذه الحقائق بدون برهان سنة 1816 ثم جاء كوشي بعد ذلك وبرهنها ولقد ذكر بعض البحاثة أنها ذكرت وبرهنت عام 1802 بواسطة الرياضي هاروس.

فاي Φ PHI

هو الحرف اليوناني φ أو Φ.

● **معامل فاي:**

انظر معامل.

● **دالة فاي:** انظر أويلر ــ دالة أويلر.

فايرشتراس، كارل ويلهلم
WEIERSTRASS, KARL THEODOR WILHELM (1815-1897)

عـالـم ألماني عظيم في علم التحليـل. وهو أول من عـرف الدوال التحليلية باستخدام متسلسلات القوى. وقد ساهم بشكل فعال في نظرية المتغير العقدي والدوال الأبلية والناقصية وحسبان التغيرات.

● **معادلات فايرشتراس:**

هي معادلات تكاملية لدوال الاحداثيات لجميع السطوح الأصغرية في تمثيل تحارري:

$$x = R \int (1 - u^2)\, \phi (u)\, du$$

$$y = R \int i\, (1 + u^2)\, \phi (u)\, du$$

$$z = R \int 2u\, \phi (u)\, du$$

حيث R هي الجزء الحقيقي لأي دالة موضوعة أمامها.

مثال: المجسم اللولبي القائم ينتج من وضع $\phi (u) = \frac{ik}{2u^2}$. حيث k ثابت حقيقي. ويمكن الحصول على معادلات فايرشتراس من معادلات انبر بجعل u و v و ϕ و ψ تخيليين مترافقين.

انظر انبر ــ معادلات انبر.

أما الدوال x,y,z فهي توافقية حسب مبرهنة فايرشتراس التي تقول بأن الشرط اللازم والكافي ليكون سطح ما معطى بتمثيل تحارري أصغرياً هو أن تكون دوال الاحداثيات المعرفة أعلاه توافقية.

انظر سطح ــ سطح انبر ــ سطح شيرك.

● **مبرهنة التقريب لفايرشتراس:**

إن كل دالة مستمرة يمكن أن تقرب في فترة مغلقة بواسطة كثير حدود إلى أي درجة مطلوبة من الدقة. ذلك يعني أنه من أجل أي دالة مستمرة f في فترة مغلقة [a,b] وأي عدد موجب ε يوجد كثير حدود P(x) بحيث $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$ من أجل أي x في الفترة [a,b]. ونشير إلى أن العالم ستون قد عمم هذه المبرهنة. ليكن T فضاء طوبولوجياً متراصاً و S هي مجموعة الدوال المستمرة حقيقية القيمة المعرفة على T. عندئذٍ فإن كل دالة مستمرة حقيقية القيمة معرفة على T يمكن أن تقرب بانتظام بواسطة عنصر من S إذا كانت S تحقق الشروط التالية:

(1) إذا كان f و g عنصرين من S و a عدداً حقيقياً، فإن af و f + g و f×g هي عناصر من S.

(2) إذا كانت x و y نقطتين مختلفتين من T و a و b عددين حقيقيين فإنه يوجد عنصر f من S يحقق الشرطين:

$$f(x) = a, f(y) = b$$

انظر بيرنشتاين.

● **دوال فايرشتراس الناقصة (دوال P):**

انظر ناقص.

● **اختبار M لفايرشتراس للتقارب المنتظم:**

إذا كانت الدوال $|f_1(x)|, |f_2(x)|, |f_3(x)|, \ldots$ محدودة من أجل $x\epsilon(a,b)$ بالأعداد $M_1, M_2, M_3, \ldots$ وإذا كانت المتسلسلة ΣM_n متقاربة فإن المتسلسلة $\Sigma f_n(x)$ متقاربة بانتظام في الفترة (a,b).

مثال: لنأخذ الفترة $(0, \frac{1}{2})$ فنجد أن مجموعة الدوال $x, x^2, x^3, \ldots$ محدودة في هذه الفترة بالأعداد $\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \ldots$. ولما كانت $\Sigma(\frac{1}{2})^n$ متقاربة فإن Σx^n متقاربة بانتظام في الفترة $(0, \frac{1}{2})$.

● **الشرط اللازم لفايرشتراس(حسبان التغيرات):**

إن الشرط اللازم الذي يتحقق إذا كانت الدالة y تُصغر (تجعله أصغرياً) المقدار $\int_{x1}^{x2} f(x,y,y')\,dx$ هو $E(x,y,y',Y') \geq 0$ من أجل جميع الثلاثيات (x,y,Y') التي تحقق $(x,y,Y') \neq (x,y,y')$، حيث:

$$E = f(x,y,Y') - f(x,y,y') - (Y' - y')f_{y'}(x,y,y')$$

ونشير هنا إلى أن الشرط اللازم للوجاندر $f_{y'y'}(x,y,y') \geq 0$ ينتج من الشرط السابق.

انظر حسبان ــ حسبان التغيرات؛ انظر **أويلر** ــ معادلة أويلر؛ انظر **لوجاندر**.

● **مبرهنة التحضير لفايرشتراس:**

لنفرض أن $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هي متسلسلة قوى شكلية في $x_1, x_2, \ldots, x_n$

بحيث لا تحوي حداً ثابتاً بينما تحوي حداً في x_1 فقط تكون درجته k على الأقل. عندئذٍ يوجد متسلسلة قوى شكلية E تحتوي حداً ثابتاً وعبارة وحيدة:

$$G = x_1^k + x_1^{k-1} G_1 + x_1^{k-2} G_2 + \dots + G_k$$

حيث تكون كل واحدة من G_i متسلسلة قوى شكلية في $x_2, x_3, \dots, x_n$ بدون حد ثابت وبحيث $F = GE$.

فايل، هيرمان — WEYL, HERMANN (1885-1955)

رياضي وفيلسوف ألماني، أنجز أعمال أساسية في موضوع تمثيل الزمر وموضوع سطوح ريمان. كذلك اشتغل في الجبر ونظرية الأعداد وميكانيكا الكم والنظرية النسبية والطوبولوجيات وأساسيات الرياضيات. وقد أيد مذهب الحدسية لبروور (انظر بروور). وقد قضى فايل آخر 22 سنة من حياته في معهد الدراسات المتقدمة في برنستون بالولايات المتحدة الأميركية.

فاينغارتن، جوهانس ليونارد غوتغريد جوليوس

WEINGARTEN, JOHANNES LEONARD JULLUS (1836-1910)

رياضي ألماني اختص بالرياضيات التطبيقية والهندسة التفاضلية.

- **سطح فاينغارتن:**

هو سطح يكون كل شعاع رئيسي فيه دالة للشعاع الآخر. مثال: السطوح ذات التقوس الكلي الثابت والسطوح ذات التقوس الوسط الثابت هي من سطوح فاينغارتن، مرادفها **سطح من W**.

فترة — INTERVAL

(1) وتعرف الفترة في **الأعداد الحقيقية** بأنها المجموعة التي تحتوي على كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين عددين يمكن أن يكون أحدهما أو كلاهما أي من الرمزين ∞ أو ∞- وتنقسم الفترات إلى الأنواع التالية:

(أ) **الفترة المفتوحة المحدودة:** $(a,b) = \{ x | a<x<b \}$.

(ب) **الفترة المفتوحة اللامحدودة**: وهي إما أن تكون على الصورة $(a,\infty) = \{ x|x>a \}$ أو على الصورة $(-\infty,a) = \{x|x<a\}$ أو على الصورة $\{ x|x> -\infty \} \cup \{ x|x<\infty \} = (-\infty,\infty)$ وهذه الأخيرة هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

(جـ) **الفترة نصف الفترة المحدودة**: وهي تكون على الصورة $[a,b) = \{ x|a\leq x<b \}$ أو على الصورة $(a,b] = \{ x|a<x\leq b \}$.

(د) **الفترة نصف المفتوحة اللامحدودة**: وتكون على الصورة $[a,\infty) = \{ x|x\geq a \}$ أو على الصورة $(-\infty,a] = \{ x|x\leq a \}$.

(هـ) **الفترة المغلقة المحدودة**: وتكون على الصورة $[a,b] = \{ x|a\leq x\leq b \}$.

(و) **الفترة نصف المغلقة المحدودة**: وتكون على إحدى الصورتين الموجودتين في (جـ).

(2) **الفضاء ذو بعدية n**: تعرف الفترة المغلقة في فضاء X بعديته n بأنها المجموعة:

$[a,b] = \{ x\epsilon X \mid a_i<x_i<b_i \}$ لجميع قيم $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ حيث $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a_i<b_i$ لجميع القيم.

أما الفترة المفتوحة، فتعرف بأنها لجميع قيم $(a,b) = \{ x\epsilon X \mid a_i<x_i<b_i \}$.

وتعرف بقية أنواع الفترات المذكورة في (1) بنفس الطريقة. والفترة نصف المفتوحة (أو نصف المغلقة) المذكورة في (1) تسمى مفتوحة جزئياً (أو مغلقة جزئياً) ونورد أحد التعاريف للإيضاح.

$\{x\epsilon X \mid a_i<x_i<b_i$ و $\}$ لبعض قيم b ولبعض قيم i لقيم i الأخرى $a_i\leq x_i<b_i$ **تسمى بالفترة المفتوحة جزئياً (أو المغلقة جزئياً).**

فترة الثقة: انظر ثقة.

● **فترة التقارب**: انظر تقارب.

● **فتل جيوديزي:**

انظر جيوديزة.

● **فتل منحنى فضائي عند نقطة:**

إذا كانت P نقطة ثابتة و P′ نقطة متغيرة على منحنى فضائي موجه C وكان طول القوس من P إلى P′ هو s وكانت Δψ الزاوية بين الاتجاهين الموجبين لثنائيي الناظمين عند P و P′ فإن فتل C عند النقطة P، هو:

$$\frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s}$$

ونختار إشارة $\frac{1}{\tau}$ بحيث يصير $\frac{\beta}{\tau} = \frac{d\sigma}{ds}$.

انظر فرنييه ــ صيغ فرنييه ــ سيريه.

ويمكن أن نفهم الفتل على أنه قياس معدل انقلاب C خارج المستوى الملاصق وذلك بالنسبة لطول القوس S. ونستطيع الحصول على الفتل من المعادلة التالية: (علمًا بأن الشرطة تعني الاشتقاق بالنسبة إلى S):

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

و ρ هو نصف قطر التقوس.

● **معاملات الفتل لزمرة:**

إذا كانت G زمرة تبديلية لها عدد منته من المولدات فإن G تكون الجداء الديكارتي للزمر الدوروية اللامنتهية $F_1, F_2, \ldots, F_m$ والزمر الدوروية ذات المرتبة المنتهية $H_1, H_2, \ldots, H_n$ العدد m والمرتبات $r_1, r_2, \ldots, r_n$ للزمر $H_1, H_2, \ldots, H_n$ تشكل نظاماً تاماً من اللامتغيرات. ونسمي الأعداد $r_1, r_2, \ldots, r_n$ **معاملات الفتل** للزمرة G. ونقول عن G أنها **عديمة الفتل** إذا كان $n = 0$.

● **نصف قطر الفتل:**

هو مقلوب الفتل. ويستعمل بعض المؤلفين الرمز τ للدلالة على الفتل بدلاً من $\frac{1}{\tau}$.

فدان **ACRE**

هو وحدة لقياس مساحة الأراضي ويساوي 43560 قدماً مربعاً أو 4840 ياردة مربعة.

فراغمن، لارس ادفارد **PHRAGMEN, LARS EDVARD (1863-1937)**

عالم سويدي في التحليل.

● **دالة فراغمن ــ ليندلوف:**

هي الدالة $h(\theta) = \lim_{r \to \infty} \sup \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}}$ المتعلقة بالدالة f الصحيحة من مرتبة منتهية ρ. وتعتبر الدالة $h(\theta)$ دالة جيب جزئي في المرتبة ρ.

انظر **صحيح** ــ دالة صحيحة.

فرجار **COMPASSES**

الفرجار هو آلة لرسم الدوائر أو لقياس المسافة بين نقطتين.

فَرْجيب **VERSED**

● **فرجيب تمام وفرجيب:** انظر **مثلثاتي** ــ دوال مثلثاتية.

فرجيب **COVERSED SINE**

الفرجيب لزاوية هو واحد ناقص جيبها. (أي أن فرجيب زاوية θ هو $1 - \sin\theta$). ويقول البعض أن الفرجيب هو الفرق بين نصف القطر وجيب الزاوية المنشأة على دائرة الوحدة. انظر **مثلثي** ــ دوال مثلثية.

فرز DETACHMENT

● **قاعدة الفرز:**

وتنص هذه القاعدةعلى أنه إذا كان الاقتضاء صائباً وكان المقدم صائباً فإن التالي يكون صائباً. مثلاً: إذا كانت العبارتان «إذا خسر فريقي فسآكل قبعتي» و «لقد خسر فريقي» صائبتان، فإن العبارة «سآكل قبعتي» عبارة صائبة.

فردي ODD

● **دالة فردية:**

نقول بأن $f(x)$ المعرفةعلى الفترة I هي دالة فردية إذا كانت الدالة $f(-x)$ معرفة على الفترة I مهما تكن $x \in I$ وكان $f(-x) = -f(x)$.

مثال: $f(n) = x^3$ المعرفة على $[-a,a]$ هي دالة فردية.

انظر **دالة**.

● **عدد فردي:**

هو عدد صحيح لا يقبل القسمة على 2. ويمكن أن يكتب بالشكل $2n + 1$ حيث n هو عدد صحيح.

فرض HYPOTHESIS

(1) قضية مفروضة تستخدم كمقدمة منطقية لبرهنة نتائج معينة.

(2) قضية نعتقد بصحتها لأن نتائجها صحيحة.

(3) (إحصاء) ادعاء أوزعم يتعلق بتوزيع متغير عشوائي واحد أو توزيعات عدة متغيرات عشوائية، وغالباً ما يكون الفرض الإحصائي حول وسطاء التوزيع. مثلاً: الفرض بأن وسط التوزيع يساوي قيمة معينة. فإذا كان $f(x,\theta)$ هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X حيث تمثل θ وسيط التوزيع فإن الادعاء بأن θ تساوي قيمة معينة θ_0 هو فرض إحصائي يكتب بشكل

$H_0: \theta = \theta_0$. **ويسمى فرض العدم**. ويكون في ذهننا فرض آخر **يسمى الفرض البديل** H_1، مثل $H_1: \theta \neq \theta_0$ أو $H_1: \theta > \theta_0$، أو $H_1: \theta < \theta_0$. وبصورة أكثر عموماً، إذا كان $f(x; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$ توزيعاً احتمالياً بالوسطاء $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$ التي تقع في الفضاء Ω فنكتب فرض العدم $H_0:(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \in \Omega_0$ مقابل الفرض البديل $H_1:(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \in \Omega_1$.

- **فرض مقبول** (إحصاء):

فرض إحصائي يوجد احتمال بصحته.

- **فرض بديل** (إحصاء):

انظر فرض؛ وانظر اختبار الفرض.

- **فرض بسيط** (إحصاء):

فرض يعين التوزيع الاحتمالي بصورة تامة.

مثال: إذا كان $f(x; \theta_1, \theta_2)$ توزيعاً طبيعياً بالوسط θ_1 والتباين θ_2 فإن الفرض $H_0: \theta_1 = \theta_{10}, \theta_2 = \theta_{20}$ فرض بسيط، حيث θ_{10} و θ_{20} هي قيم معينة. أما الفروض $H_0: \theta_1 = \theta_{10}$ و $H_0: \theta_2 = \theta_{20}$ و $H_0: \theta_1 \geq \theta_{10}, \theta_2 \leq \theta_{20}$ فهي فروض غير بسيطة وتسمى فروضاً مركبة.

- **فرض مركب**:

أي فرض إحصائي غير بسيط. انظر أعلاه فرض مركب.

- **فرض العدم** (إحصاء):

انظر أعلاه فرض، وانظر اختبار الفرض.

- **فرض خطي** (إحصاء):

لتكن $y_1, y_2, ..., y_n$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع توزيعات طبيعية بنفس التباين σ^2 وبأوساط $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ على التوالي. ونفترض أن هذه الأوساط تعتمد على الوسطاء $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ وفق المعادلات الخطية التالية:

$i = 1, 2, ..., n$.

و $\eta_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_k x_{ik}$.

حيث $k \leq n$ وقيم x_{ij} معلومة.

الفرق الخطي هو فرض إحصائي يدعي أن الوسطاء $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ تحقق قيوداً خطية تتمثل بـ r من المعادلات الخطية:

$$C_{i1}\beta_1 + C_{i2}\beta_2 + \ldots + C_{ik}\beta_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

● **اختبار الفرض (إحصاء):**

قاعدة لاتخاذ قرار برفض أو قبول فرض إحصائي أو بالتريث وأخذ مشاهدات أخرى لعدم كفاية الأدلة على صواب أو خطأ الفرض. يعتمد اختبار الفرض على مشاهدات عينة عشوائية $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ أو عدة عينات عشوائية. ويقسم فضاء العينة إلى منطقتين: منطقة الرفض C ومنطقة القبول A. ويتخذ قراراً برفض فرض العدم $H_0{:}\theta \in \Omega$ إذا كان $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C$ ونقبل H_0 إذا كان $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in A$. إن قبول الفرض H_0 يعني عدم وجود دلالات كافية في العينة لدحض H_0. وعند تنفيذ الاختبار الإحصائي يمكن ارتكاب نوعين من الأخطاء:

(1) رفض فرض العدم وهو صحيح وهذا **خطأ من النوع الأول**.

(2) قبول فرض العدم وهو غير صحيح وهذا **خطأ من النوع الثاني**.

ولوصف الاختبار الإحصائي ومعرفة مزاياه نعرف **دالة القوة** $\beta(\theta)$ بأنها احتمال رفض فرض العدم H_0 عندما تكون θ الوسيط الحقيقي للتوزيع. أي أن:

$$\beta(\theta) = \Pr\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C|\theta), \qquad \theta \in \Omega$$

أما **قوة الاختبار** فهي $\beta(\theta)$ لأجل $\theta \in \Omega_1$ ويساوي احتمال ارتكاب خطأ من النوع الأول $\beta(\theta)$ لأجل $\theta \in \Omega_0$ ويساوي احتمال ارتكاب خطأ من النوع الثاني $1-\beta(\theta)$ لأجل $\theta \in \Omega_1$. ونعرف **حجم الاختبار** (أو حجم منطقة الرفض) بأنه $\sup\limits_{\theta \in \Omega_0} \beta(\theta)$. إن من المرغوب فيه هو إيجاد الاختبار الأفضل الذي يجعل احتمال كل من الخطأين أصغر ما يمكن في آن واحد. إلا أنه لا يمكن اصغار الاحتمالين في آن واحد عندما يكون حجم العينة ثابتاً، لذلك توضع مسألة البحث عن الاختبار الأفضل بالشكل التالي: نختار سلفاً حداً أعلى α حيث $0<\alpha<1$ **(يسمى مستوى المعنوية)** لاحتمالات أخطاء النوع الأول، أي نشترط:

$$\beta(\theta) \leq \alpha \qquad \theta \in \Omega_0$$

وتحت هذا الشرط نبحث عن الاختبار الذي يصغر احتمالات أخطاء النوع الثاني $1 - \beta(\theta)$ لأجل $\theta\epsilon\Omega_1$. وبصورة مكافئة فإننا نبحث عن الاختبار الذي يحقق الشرط $\alpha \leq \beta(\theta)$ لأجل $\theta\epsilon\Omega_0$ ويعظم قوة الاختبار $\beta(\theta)$ لأجل $\theta\epsilon\Omega_1$. ويسمى هذا الاختبار إن وجد، الاختبار الأقوى بانتظام. ويكون مستوى المعنوية لأغلب الاختبارات مساوياً لحجم الاختبار. إذا لم يكن **الاختبار الأقوى بانتظام** موجوداً فإننا نبحث عن **اختبار غير متحيز** يعرف بالشرطين:

$\alpha \geq \beta(\theta)$ لأجل $\theta\epsilon\Omega_0$.

و $\alpha < \beta(\theta)$ لأجل $\theta\epsilon\Omega_1$.

انظر **كاي** ـ اختبار مربع كاي، **ثقة** ـ فترة ثقة، **نيمان** ـ اختبار نيمان وبيرسون، **تتباعي** ـ تحليل تتابعي، **اختبار** ـ إحصاءة اختبار.

- **فرض وسيطي** (إحصاء):

فرض يتعلق بوسيط أو وسطاء توزيع احتمالي معلوم الصيغة التحليلية.

- **فرض لا وسيطي** (إحصاء):

فرض عام لا يشترط معلومية الصيغة التحليلية لدالة التوزيع الاحتمالي.

- **فرضية التلاحم**:

مخمنة تقدم بها كانتور عام 1878 تقول بأن العدد الرئيسي لأي مجموعة جزئية لا منتهية من مجموعة الأعداد الحقيقية (الملتحم الحقيقي) هو العدد الرئيسي لمجموعة الأعداد الموجبة أو العدد الرئيسي لمجموعة الأعداد الحقيقية. **أما فرضية التلاحم العامة** فهي أن 2 أصغر عدد رئيسي أكبر من N حيث N هو أي عدد رئيسي لا منته.

انظر **كوهين**.

NULL HYPOTHESIS **فرضية العدم**

انظر **فرض**.

فرع BRANCH

● **فرع لمنحنى:**

هو أي جزء من المنحنى منفصل عن الأجزاء الأخرى بواسطة نقاط أو نقاط خاصة مثل الرؤوس، نقاط القيم الصغرى والكبرى، القرنات والعقد إلى آخره. هذا يعني أننا نستطيع الحديث عن فرعي القطع في أربعة فروع القطع الزائد. كما نقول فرعي القطع المكافىء مثل التكعيبي أو نقول ذلك الفرع من المنحنى الذي هو فوق (أو تحت) محور x.

● **فرع لدالة تحليلية متعددة القيم:**

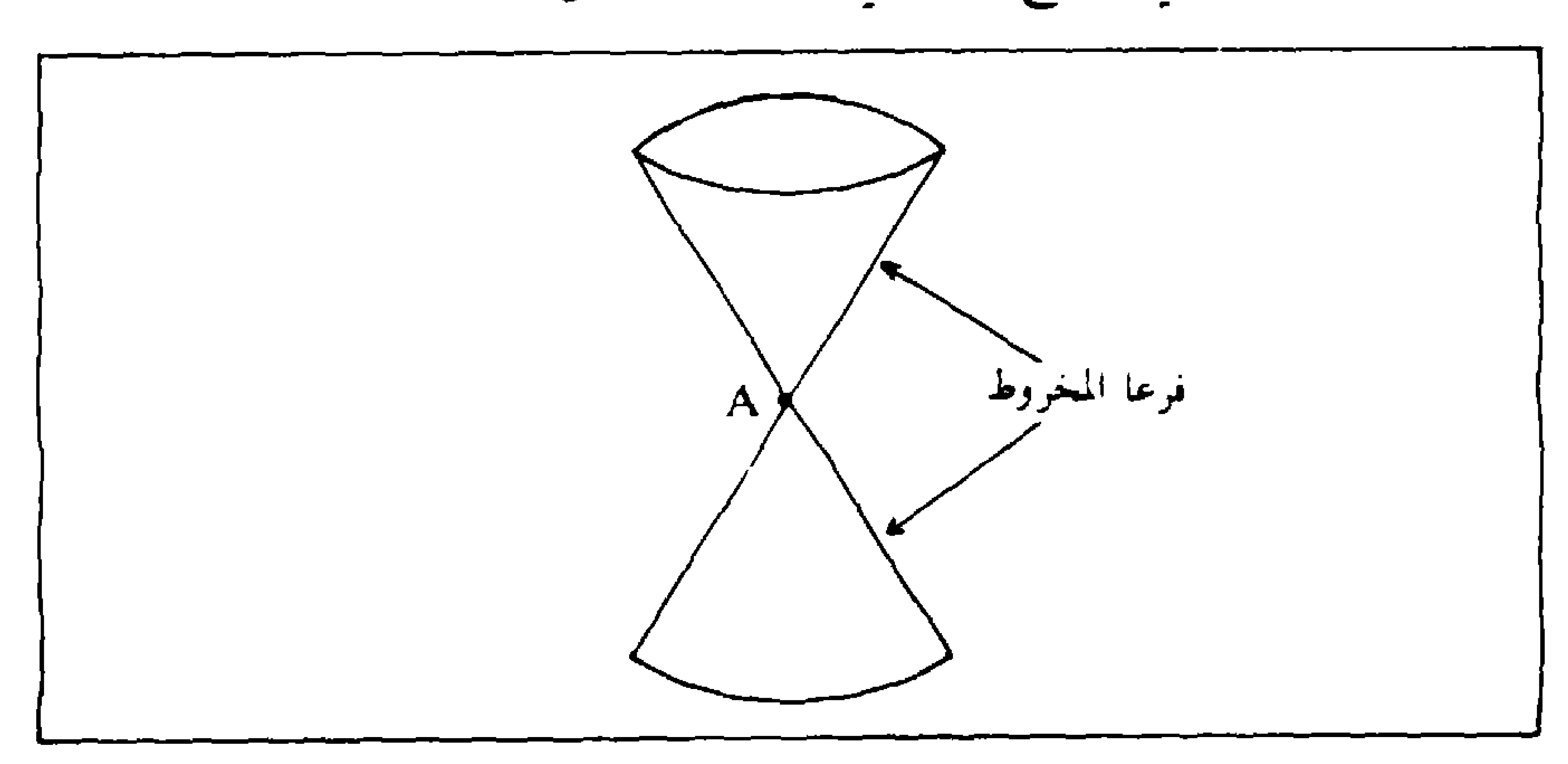
هو الدالة التحليلية الوحيدة القيمة $w = f(z)$ الناتجة من قيم z الواقعة في شطر واحد من أشطر سطح ريمان الذي عرفت الدالة الأصلية عليه.

● **فرع لا منته:**

انظر لا منته.

فرع مخروط NAPPE

هو أحد جزئي سطح مخروطي مفصول برأس A.



هو ما ينتج من طرح كمية من أخرى.

● خارج قسمة فرقية:

هي النسبة $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ لدالة $f(x)$. فمثلاً لو كان $f(x) = x^2$ فإن خارج القسمة الفرقية هي:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta X} = 2x + \Delta x$$

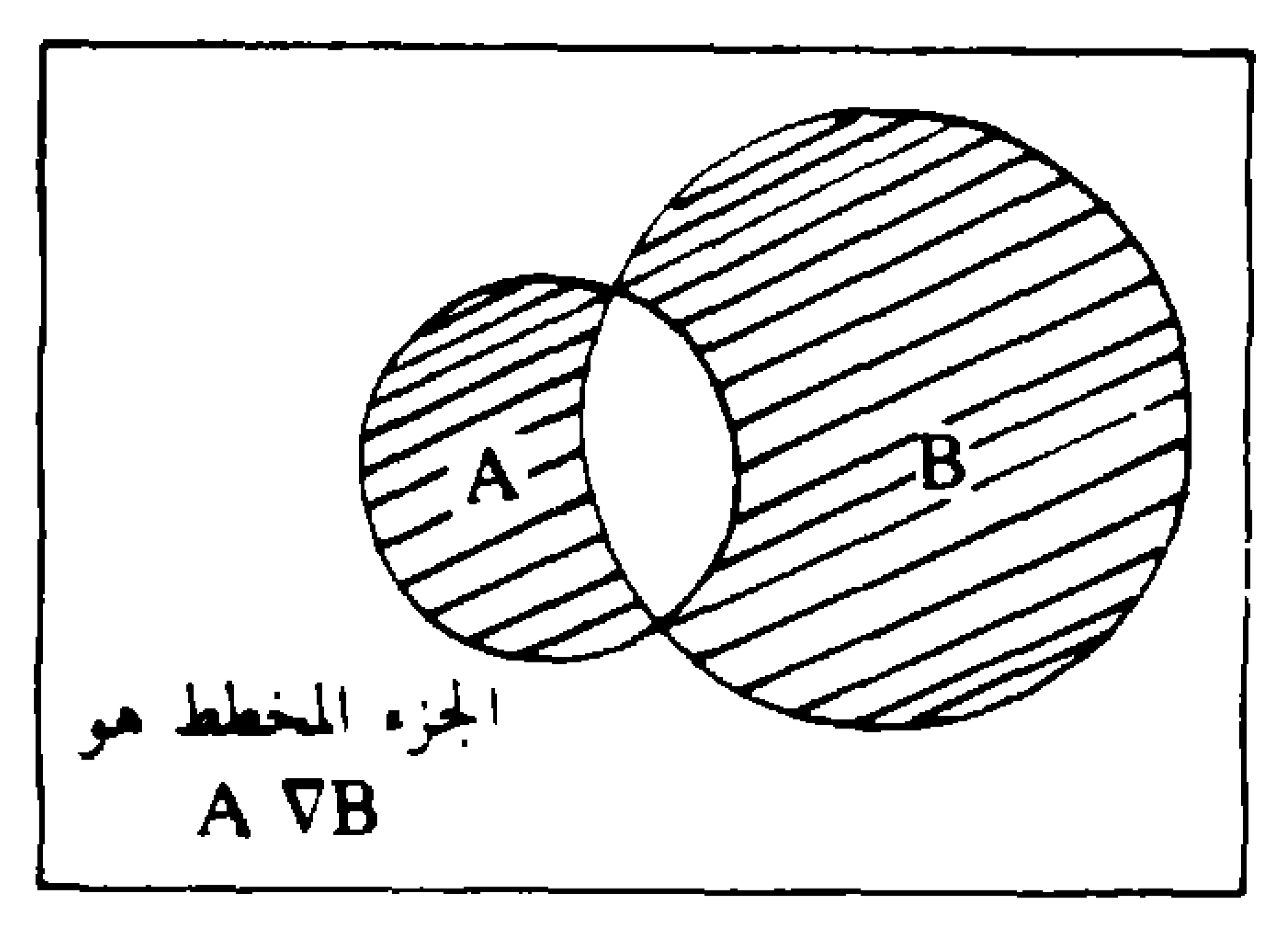
انظر مشتق.

● فرق تناظري لمجموعتين A و B:

هو المجموعة المكونة من اتحاد المجموعتين $A - B$ و $B - A$ ونرمز لهذه المجموعة عادة بالرمز ∇ وهكذا نكتب:

$$(A - B) \cup (B - A) \equiv A \nabla B$$

ويبين الجزء المخطط المجموعة $A \nabla B$.



انظر حلقة ـ حلقة مجموعات.

● فرق القوى المتشابهة:

هو عبارة من الشكل $x^n - y^n$. فإذا كان n فردياً فإن الفرق يقبل القسمة على $x - y$ بينما يقبل هذا الفرق القسمة على $x + y, x - y$ إذا كان n زوجياً.

مثال:

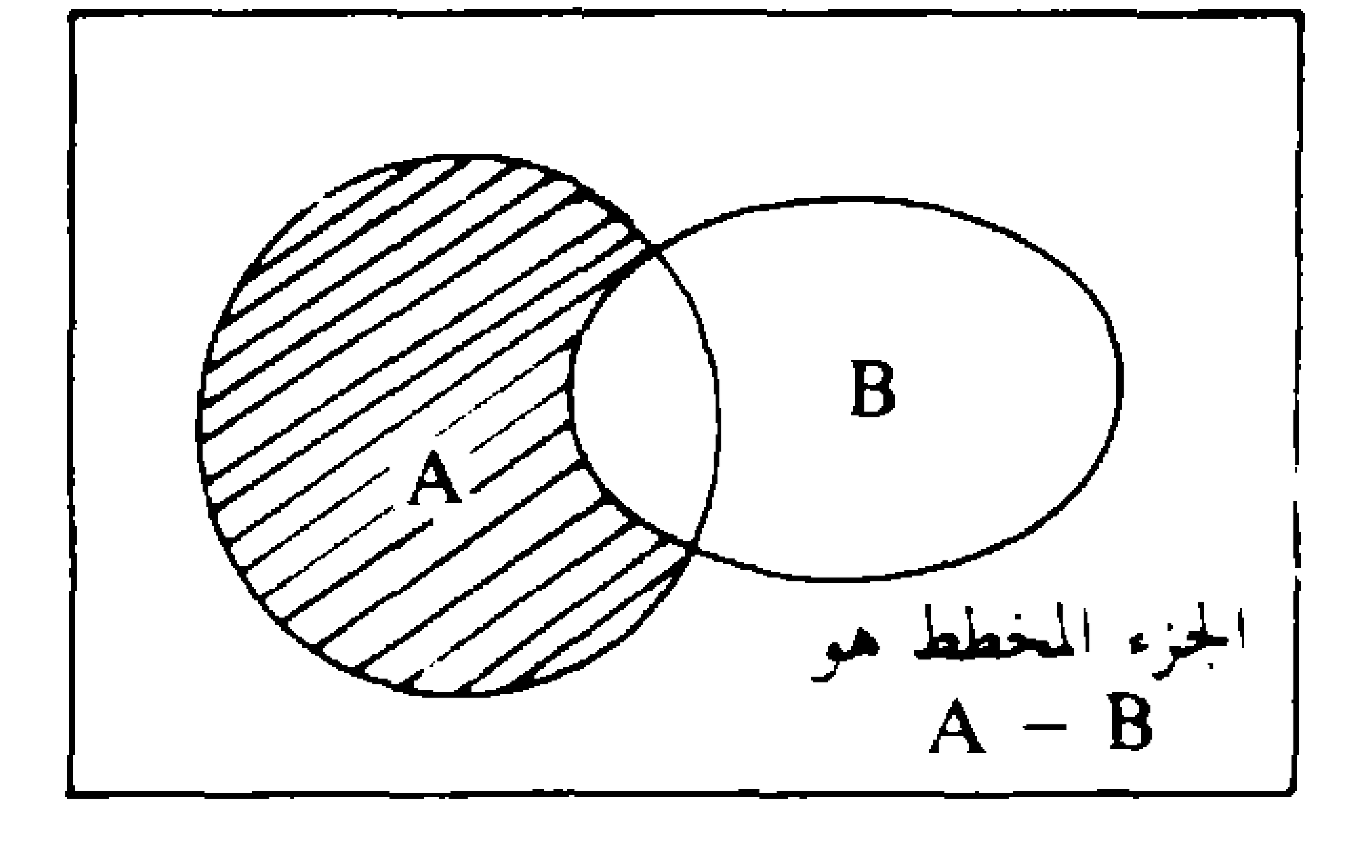
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$$

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

انظر مجموع ـ مجموع القوى المتشابهة.

● فرق مجموعتين:



نعرف الفرق A − B للمجموعتين A و B على أنه تلك المجموعة التي تنتمي عناصرها إلى A ولا تنتمي إلى B كما هو مبين بالشكل.

● فروق جزئية لدالة:

إذا كانت لدينا الدالة f(x,y,z,...) وثبتنا واحداً أو أكثر من المتغيرات المستقلة، ثم أخذنا الفروق المنتهية بالنسبة للمتغيرات المستقلة الأخرى نحصل على فروق جزئية لتلك الدالة.

مثال: ليكن $f(x,y) = x^2 + xy$ عندئذٍ:

$${}_yf(x,y) = x^2 + x(y + k) - x^2 - xy = xk$$

ويمكن هنا أن نعرف الفروق الجزئية ذات المراتب المختلفة.

● فروق المرتبة الأولى:

هي الأعداد التي نحصل عليها من متتالية بطرح كل حد من الحد الذي يليه وهكذا فإن فروق المرتبة الأولى للمتتالية (1,3,5,7,...) هي (2,2,...,2,...).

● فروق المرتبة الثانية:

هي فروق المرتبة الأولى لفروق المرتبة الأولى. وهكذا فإن فروق المرتبة الأولى للمتتالية (1,2,4,7,11,...) هي (1,2,3,4,...). أما فروق المرتبة الثانية، فهي (1,1,1,...) ومن الطبيعي أن نتجه إلى تعريف فروق المرتبة الثالثة وفروق المرتبة r بصورة مشابهة. فإذا كانت لدينا المتتالية $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ فإن فروق المرتبة الأولى لها هي: $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$

أما فروق المرتبة الثانية، فهي: $a_3 - 2a_2 + a_1, a_4 - 2a_3 + a_2, \ldots$

بينما فروق المرتبة r تأخذ الصورة:

$$[a_{r+1} - r\,a_r + \frac{r(r-1)}{2!}a_{r-1} - \ldots \pm a_1],$$

$$[a_{r+2} - r\,a_{r+1} + \frac{r(r-1)}{2!}a_r - \ldots \pm a_2], \ldots$$

● فروق منتهية:

لتكن لدينا الدالة $f(x)$ المعرفة من أجل جميع قيم ... $a, a + h, a + 2h,$ ولنأخذ متتالية القيم ... $f(a), f(a+h), f(a+2h),$ وتكون الفروق المنتهية بالتعريف هي القيم:

$$f(a + h) - f(a), f(a + 2h) - f(a + h), \dots \qquad (*)$$

(أي فروق من المرتبة الأولى لقيم الدالة $f(a, a+h, \dots)$ ونرمز لهذه الفروق المنتهية عادة بالرموز $\Delta f(a), \Delta f_1(a), \Delta f_2(a)$ على الترتيب.

ويمكن الحصول من مجموعة القيم (*) على فروق منتهية للفروق المنتهية وهكذا. . ونرمز لهذه الفروق المتتابعة عادة بالرموز $\Delta f(x), \Delta^2 f(x), \dots$ وهكذا نكتب:

$$\Delta f(x) = f(x + 1) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\Delta f(x) = f(x + 2) - 2f(x + 1) + f(x)$$

● معادلة فرقية:

هي معادلة من الشكل:

$$F(x, y(x), \Delta y(x), \Delta^2 y(x), \dots, \Delta^n y(x)) = 0$$

حيث:

$$\Delta y(x) = y(x + 1) - y(x)$$

$$\Delta^2 y(x) = y(x + 2) - 2y(x + 1) + y(x)$$

....

$$\Delta^n y(x) = y(x + h) - ny(x + n - 1) + \frac{n(n - 1)}{2!} y(x + n - 2) - \dots \pm y(x)$$

وبسبب هذه العلاقات فإن المعادلة الفرقية تأخذ الشكل:

$$G(x, y(x), y(x + 1), \dots, y(x + n)) = 0$$

مثال: $y(x + 2) - xy(x) = 0$.

● معادلة فرقية جزئية:

هي معادلة تحتوي على المتغيرات المستقلة $x, y, z, \dots$ والدوال $g(x, y, \dots)$ $f(x, y, \dots)$, والفروق الجزئية من مراتب مختلفة لهذه الدوال بالنسبة للمتغيرات المستقلة.

● **معادلة فرقية خطية:**

هي معادلة من الشكل:

$$p_0(x)\,y(x) + p_1(x)\,y(x+1) + p_2(x)\,y(x+2) + \ldots + p_n(x)\,y(x+n) = f(x)$$

فإذا كانت $f(x) \equiv 0$ قلنا بأن المعادلة متجانسة. ونقول بأن $y(x) = \phi(x)$ هو حل للمعادلة الفرقية إذا كان $G(x,\phi(x), \phi(x+1), \ldots, \phi(x+n) \equiv 0$ من أجل جميع قيم x في فترة ما. فإذا كان لدينا n حلاً $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ للمعادلة الفرقية المتجانسة الخطية وكانت هذه الحلول مستقلة خطياً فإن الحل العام للمعادلة يأخذ الشكل:

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$$

حيث $c_1, \ldots, c_n$

هي ثوابت اختيارية. نقول بأن مجموعة الحلول $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x)$ مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان المعين:

$$\begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \ldots & \phi_n(c) \\ \phi_1(x+1) & \phi_2(x+1) & \ldots & \phi_n(x+1) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \phi_1(x+n-1) & \phi_2(x+n-1) & \ldots & \phi_n(x+n-1) \end{vmatrix}$$

مغايراً للصفر في فترة ما. وهكذا نجد أن المعادلات الفرقية تتشابه إلى حد كبير مع المعادلات التفاضلية حيث $y(x+n)$ تلعب دور المشتق من المرتبة n للدالة $y(x)$.

مثال: من أجل حل المعادلة الفرقية $y(x+2) - 3y(x+1) + 2y(x) = 0$ نفترض أن لها حلاً من الشكل $(x) = \lambda^x$ بالتعويض نحصل على $\lambda^2 - x\lambda + 2 = 0$ حيث نجد $\lambda_2 = 2, \lambda_1 = 1$ وهكذا يوجد للمعادلةحلان يمكن التأكد أنهما مستقلان، هما $\phi_2(x) = 2^x, \phi_1(x) = 1^x$ ويكون الحل العام هو:

$$y(x) = c_1 2^x + c_2 1^x$$

فروبينيوس، فرديناند جورج

FROBENIUS, FERDINAND GEORGE (1849-1917)

رياضي ألماني اهتم في الجبر والتحليل ونظرية الزمر.

انظر سيلو ــ مبرهنة سيلو.

● **مبرهنة فروبينيوس:**

إذا كانت D جبرية قسمة على حقل الأعداد الحقيقية بحيث يحقق كل عنصر في D معادلة كثير حدود بمعاملات حقيقية فإن D تكون متماثلة مع حقل **الأعداد الحقيقية** أو **حقل الأعداد العقدية** أو مع **جبرية القسمة للرباعيات**. ويمكن تعميم هذه النظرية بحذف شرط التجميعية في الضرب لعناصر D وفي هذه الحالة فإن الاحتمال الإضافي الذي يمكن أن تكونه D هو أن تكون جبرية كما يلي:

انظر كايلي.

فريدهولم، ايريك ايفار

FREDHOLM, ERIK IVAR (1866-1927)

عالم سويدي في التحليل والفيزياء.

● **حل فريدهولم لمعادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني:**

إذا كانت f دالة مستمرة في x في الفترة $a \le x \le b$ وكانت K دالة مستمرة في x و t في المجال $a \le x \le b,\ a \le t \le b$ وإذا كان معين فريدهولم $D(\lambda)$ للنواة $K(x,t)$ مغايراً للصفر فإن للمعادلة التكاملية $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, y(t)\, dt$، حلاً وحيداً مستمراً $y(x)$ معطى بالعلاقة:

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b d(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt$$

حيث $D(x,t;\lambda)$ هو صغير فريدهولم الأول للنواة $K(x,t)$ أما $D(\lambda)$ فهو معين فريدهولم للنواة $K(x,t)$. (انظر ليوفيل؛ هيلبرت ــ نظرية هيلبرت ــ شميت للمعادلات التكاملية ذات النواة المتناظرة.

انظر فولتير.

● صغار فريدهولم:

نعرّف صغير فريدهولم الأول $D(x,y;\lambda)$ للنواة $K(x,y)$ بالشكل:

$$D(x,y;\lambda) = \lambda K(x,y) - \lambda^2 \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t) \\ K(t,y) & K(t,t) \end{vmatrix} dt +$$

$$+ \frac{\lambda^3}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,t_1) & K(x,t_2) \\ K(t_1,y) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,y) & K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 - \ldots$$

أما صغار فريدهولم من المراتب الأعلى فيتم تعريفها بصورة مشابهة.

● معادلات فريدهولم التكاملية:

أولاً ـ معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول هي المعادلة:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt$$

ثانياً ـ معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني هي:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt$$

حيث f و K هما دالتان معلومتان بينما $y(x)$ هي دالة مجهولة. نسمي K عادة **نواة المعادلة**. كما نسمي كلاً من المعادلتين السابقة متجانسة إذا كان $f(x) \equiv 0$ ويمكن أن يتم تعريف المعادلة الثانية بوضع $\lambda = 1$.

● معين فريدهولم (في المعادلات التكاملية):

هو المعين $D(\lambda)$ المكون من متسلسلة قوى في λ للنواة K والمعرف كما يلي:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K(t,t)\, dt + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 -$$

$$\frac{\lambda^3}{3!} \int_a^b \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) \ldots & K(t_1,t_3) \\ K(t_3,t_1) \ldots & K(t_3,t_3) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 dt_3 + \ldots$$

FRECHET, RENE MAURICE (1878-1973) فريشية، رينيه موريس

رياضي فرنسي اشتغل في التحليل والطوبولوجيا والإحصاء.

● **فضاء فريشية**:

(1) هو أي فضاء T_1.

انظر **طوبولوجي ـ فضاء طوبولوجي**.

(2) ويعرف أيضاً بأنه أي فضاء طوبولوجي خطي تام محدب محلياً ويقبل مقاساً. (وأحياناً ليس من الضروري أن يكون الفضاء محدباً محلياً).

انظر **متجه ـ فضاء المتجهات**.

FRESNEL, AUGUSTIN JEAN (1788-1827) فرينيل، اوغستان جان

فيزيائي ومهندس فرنسي.

● **تكاملات فرينيل**:

(1) هي التكاملات

(صفر) (a) $$\int_0^x \sin^2 t \, dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7.(3!)} + \frac{x^{11}}{11.(5!)} - \ldots,$$

(b) $$\int_0^x \cos^2 t \, dt = x - \frac{x^5}{5.(2!)} + \frac{x^9}{9.(4!)} - \ldots,$$

والتي تتقارب لجميع قيم x. ويسمى التكامل (a) بـ**جيب فرينيل**. أما (b) فيسمى **جيب تمام فرينيل**.

(2) وهي أيضاً تشمل التكاملات:

(a) $$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}} = (U \cos x - V \sin x)$$

(b) $$\int_x^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{2}}} = (U \sin x + V \cos x).$$

حيث

$$U = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots\right.$$

$$V = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots\right)$$

FRENET, JEAN FREDERIC (1816-1900) **فرينيه، جان فريدريك**

رياضي فرنسي اشتغل في الهندسة التفاضلية.

● **صيغ فرينية ـ سيترية:**

وتعتبر هذه الصيغ مركزية بالنسبة لنظرية المنحنيات الفضائية. وإذا كانت α, β, γ ترمز لمتجهات الوحدة على المماس والناظم وثنائي الناظم على الترتيب لمنحن فضائي وكان ρ و τ نصفي قطري التقوس والفتل فإن هذه الصيغ تكون:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{-\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\beta}{\tau}$$

حيث s تمثل طول القوس.

WESSEL, CASPAR (1745-1818) **ڤسل، كاسبار**

رياضي دانماركي، من أوائل الذين نشروا عام ١٧٩٨ التمثيل البياني للأعداد العقدية.

انظر أركاند و غاوس و واليس.

SEPARATION **فصل**

● **فصل المجموعة:**

أي فصل المجموعة إلى صنفين.

(1) **الفصل من النوع الأول:** هو فصل مجموعة مرتبة إلى صنفين A و B بحيث يكون كل عنصر في A أقل من كل عنصر في B وبحيث ينتمي العنصر

الفاصل للصنفين لأحدهما. فمثلاً يمكن فصل الأعداد المنطقة إلى المجموعة A المكونة من كل الأعداد المنطقة $x \leq 3$ و B تتكون من كل الأعداد المنطقة $x > 3$. والعدد 3 هو العدد الفاصل في هذه الحالة.

(2) **الفصل من النوع الثاني**: هو فصل مجموعة مرتبة إلى صنفين A و B بحيث يكون كل عنصر في A أقل من كل عنصر في B وبحيث لا ينتمي العدد الفاصل لأي منهما.

مثال: إذا كان Q يرمز للأعداد المنطقة فإن فصلاً من النوع الثاني للمجموعة Q يمكن أن يجري بالشكل التالي:

$$B = \{x \in Q | x^2 > 2\},\ A = \{x \in Q | x \leq 0\} \cup \{x \in Q | x^2 < 2\}$$

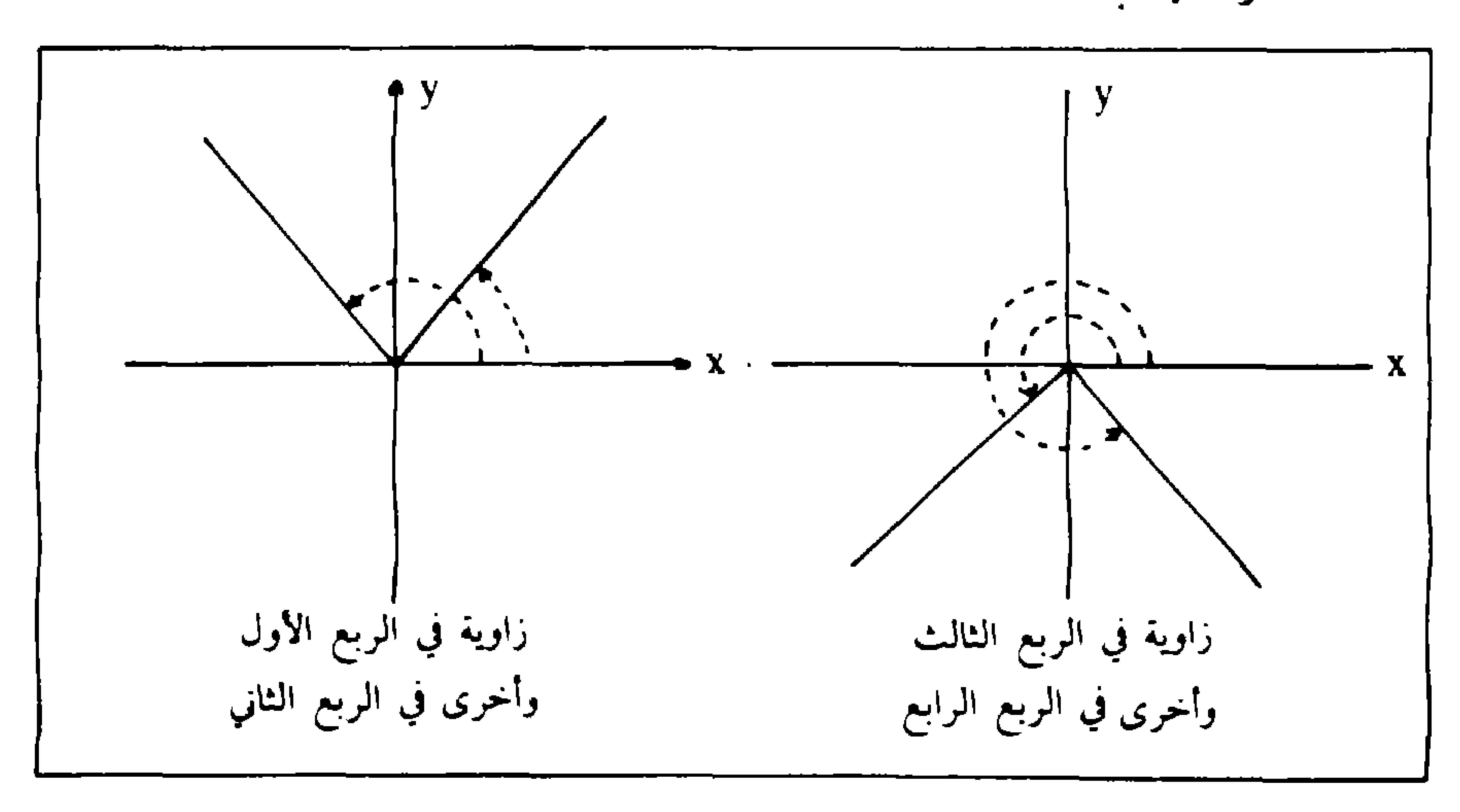
انظر **ديديكند ـ قطع ديديكند**.

- **فصل المتغيرات**:

انظر **تفاضل ـ معادلة تفاضلية قابلة للفصل**.

- **مبرهنة الفصل لشتورم**:

انظر **تذبذب**.



- **قوانين الأرباع في المثلث الكروي القائم**:

(1) إن أي زاوية وضلعها المقابل يقعان في نفس الربع.

(2) عندما يكون ضلعان في نفس الربع فإن الثالث يكون في الربع الأول.

(3) إذا كان ضلعان في ربعين مختلفين فإن الثالث يكون في الربع الثاني.

فإذا كانت الزاوية بين 0°،90° فهي تنتمي إلى الربع الأول، أما إذا كانت الزاوية بين 90°،180° فتنتمي إلى الربع الثاني وهكذا.

فصل

● **فصل قضيتين:**

هو القضية المكونة من قضيتين موصلتين بأداة الوصل «أو» ويكون فصل قضيتين خاطئاً إذا وإذا فقط كانت كل من القضيتين خاطئة.

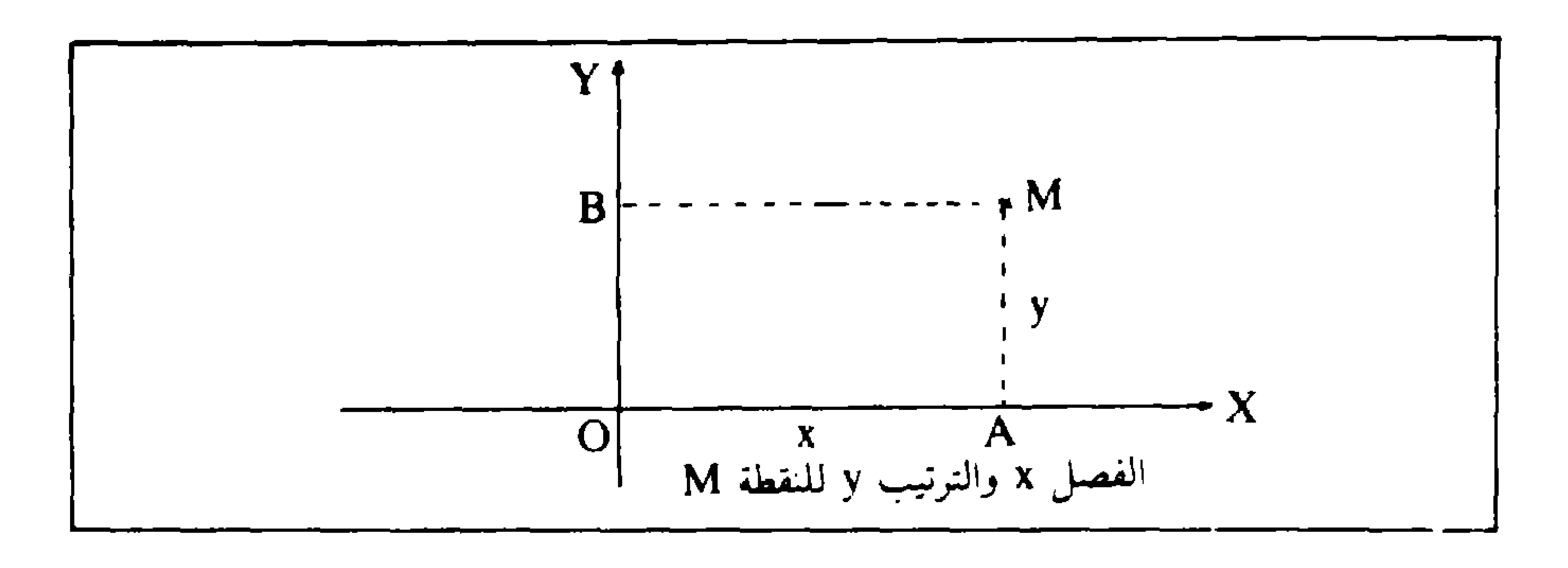
مثال (1): فصل القضيتين (أ) 6 = 3.4 و(ب) تونس عضو بالجامعة العربية هو القضية الصائبة «6 = 3.4 أو تونس عضو بالجامعة العربية».

مثال (2): فصل القضيتين (أ) اليوم هو الأربعاء و(ب) اليوم هو رأس السنة الهجرية. هو القضية «اليوم هو الأربعاء أو اليوم هو رأس السنة الهجرية» وهذه القضية صائبة فيما إذا كانت أي من القضيتين (أ) أو(ب) صائبة وتكون خاطئة إذا لم يكن اليوم هو الأربعاء ولم يكن رأس السنة الهجرية كذلك. ويرمز لفصل القضيتين p و q بالرمز $q \vee p$ وتقرأ p أو q وهذا الفصل هو **فصل احتوائي** بخلاف الفصل المستخدم في اللغة العربية العادية، حيث يستخدم عادة **الفصل الاستثنائي**، ويكون الفصل الاستثنائي لقضيتين p و q صائباً إذا وإذا فقط كانت قضية واحدة **فقط** من القضيتين صائبة.

انظر **عطف**.

فصل نقطة — ABSCISSA OF A POINT

هو الاحداثي الأفقي في نظام الاحداثيات القائمة ذات البعدين ويرمز للفصل عادة بالحرف x. كما يأخذ الفصل معنى مشابهاً إذا كان نظام الاحداثيات مائلاً. انظر **احداثيات ديكارتية**.



فضاء **SPACE**

(1) منطقة ذات ثلاثة أبعاد.

(2) أي فضاء مجرد.

انظر **مجرد**.

- **احداثي في الفضاء:**

انظر **ديكارتي** ــ احداثيات ديكارتية، و **أسطواني** ــ احداثيات أسطوانية، و **كروي** ــ احداثيات كروية.

- **الفضاء المغلف:**

هو الفضاء الذي يقع فيه تشكل ما. ويقال هنا بأن هذا التشكل مطمور في الفضاء المغلف. مثلاً الدائرة $y = \sin\theta, x = \cos\theta$. هي تشكل مطمور في الفضاء الديكارتي ذي البعدين أي فضاء (x,y).

- **المنحنيات الفضائية:**

ويشمل هذا المصطلح المنحنيات المستوية، كما أن تقاطع سطحين مختلفين يكون في العادة منحنياً فضائياً ولا يمكن أن يقع المنحنى الفضائي في مستوى واحد لأن المنحنى الفضائي يكون ملتوياً إلا إذا كان فتله يساوي صفراً.

- **نصف فضاء:**

انظر **نصف**.

K-SPACE فضاء K

نقول ان الفضاء الطبولوجي X فضاء K إذا كان X هاوسدورف وله **الطبولوجيا الضعيفة** المعينة بالعائلة المكونة من الفضاءات المتراصة والجزئية من X.

والجدير بالذكر هنا أن صنف فضاءات K أكبر بكثير من صنف الفضاءات المتراصة محلياً كما يحتوي أيضاً على فضاءات المقاس. ويمكن البرهنة على أن كل فضاء K يكون متراصاً محلياً. كما يمكن البرهنة أيضاً على أن كل فضاء K يكون فضاء له قابلية العد الأولي. ويكون الفضاء X فضاء K إذا وفقط إذا كان فضاء الخارج لفضاء متراصا محلياً. وإذا كانت الدالة $p:X \rightarrow Z$ دالة مطابقة (انظر **مطابقة**) وكان X فضاء K فإن Z يكون فضاء K أيضاً.

RIGHT (LEFT) QUOTIENT SPACE فضاء الخارج اليميني (اليساري)

لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G. نعرف **فضاء الخارج اليمين** بأنه المجموعة $\{xH|x \in G\}$ ويرمز له بالرمز $G\backslash H$ كما نعرف **فضاء الخارج اليساري** بأنه المجموعة $\{Hx|x \in G\}$ ويرمز له بالرمز $G\backslash H$. وإذا كانت G **زمرة طبولوجية** فإنه يمكن تعريف **زمرة تحويلية يمينية** على $G\backslash H$ و**زمرة تحويلية يسارية** على G/H كما يلي:

(1) **الزمرة التحويلية اليمينة**: $(G\backslash H, T, \mu)$ المعرفة بالقانون $\mu:G\backslash HxG \rightarrow G\backslash H$ حيث $\mu(A,t) = At\ (A \in G\backslash H, t \in T)$.

(2) **الزمرة التحويلية اليسارية**: $(G/H,T,\lambda)$ المعرفة بالقانون $\lambda:G/H \times G \rightarrow G/H$ حيث $\lambda(A,t) = t^{-1}A\ (A \in G/H, t \in T)$.

ORBIT SPACE فضاء المدار

ليكن (X,R,π) نظاماً ديناميكياً. (انظر **نظام ديناميكي**). ولتكن $C = \{ (x,y) \in X \times X | y \in C(x) \}$ **علاقة المدار** حيث $C(x)$ ترمز لمدار x. (انظر

نظام ديناميكي – مدار). وليكن X/C فضاء الخارج الذي تكون نقطه $x^* = C(x)$ لكل $x \in X$. وإذا عرفنا التطبيق الطبيعي $\pi: X \to X/C$ حيث $\pi(x) = x^*$ فإننا نستطيع أن نعرف طبولوجيا الخارج، وذلك بأن نقول إن $U \subset X/C$ مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $\pi^{-1}(U)$ مجموعة مفتوحة في X. يسمى الفضاء X/C بهذه الطبولوجيا بـ **فضاء المدار**.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن الدالة الطبيعية π تكون في هذه الحالة مستمرة ومفتوحة. ويكون X/C هاوسدورف إذا وفقط إذا كانت العلاقة C مغلقة في $X \times X$. وفي هذه الحالة فإن X/C تكون T_4 على فرض أن X له هذه الخاصية. (انظر **طبولوجي** – T_4). ويكون (X,R,π) أصغرياً إذا وفقط إذا كانت طبولوجيا X/C طبولوجيا **لا متقطعة** (أو تافهة)، (أي أن المجموعات المفتوحة هي X/C والمجموعة الخالية فقط).

فضاء تغطية

ليكن M فضاء طبولوجيا متصلاً ومتصلاً قوسياً بشكل محلي، نقول عن الفضاء الطبولوجي المتصل E أنه **فضاء تغطية** فوق M إذا كان هناك تطبيق $P: E \to M$ وكان لكل نقطة $x \in M$ جوار متصل U بحيث تكون كل واحدة من مركبات $P^{-1}U$ المتصلة مجموعة مفتوحة في E ويكون P تماثلاً مستمراً بين U وكل من هذه المركبات. ويسمى التطبيق P بـ **الإسقاط**.

فضاء دوال FUNCTION SPACE

ليكن (Z,d) فضاء مقاساً و Y فضاء اختيارياً. ولتكن $C(Y,Z;d) = C$ مجموعة كل الدوال المستمرة والمحدودة من Y إلى Z. المقاس التالي على $C(Y,Z;d)$

$$d^*(f,g) = \sup \{d(f(y), g(y)) \mid y \in Y\}$$

ولما كانت $C = C(Y,Z;d)$ مجموعة جزئية من فضاء الجداء Z^Y فإن C لها

طبولوجيان أحدهما مولد من d^{*} والآخر موروث من طبولوجيا Z^{Y}. ويكون $C = Z^{Y}$ في الحالات التالية:

(1) إذا كان Y متراصاً.
(2) إذا كان d مقاساً محدوداً.
(3) إذا كان Z متراصاً.

فضاء متراص مقاسي **COMPACTUM**

وهو كما يستدل من اسمه فضاء طوبولوجي متراص ويقبل مقاساً. وكأمثلة نذكر الفترات المغلقة، الكرات المغلقة (مع أو بدون داخلها) وكثيرات الوجوه المغلقة.

انظر **متراص ــ مجموعة متراصة**.

فَعَّال

● **فعل فعال:**

إذا كانت G زمرة تحويلات تؤثر على فضاء طوبولوجي X فإننا نقول بأن هذا الفعل هو فعال إذا تحقق الشرط التالي:

إذا كان $gx=x$ لكل $x \epsilon X$ فإن $g=e$ حيث e هو العنصر المحايد في G.

فعال **EFFECTIVE**

● **معدل الفائدة الفعال:**

انظر **فائدة**.

فعّال **EFFECTIVE**

نقول ان الزمرة التحويلية (X,T,Π) فعالة إذا كان لكل $t \epsilon T$ و $t \neq e$ (e العنصر المحايد للزمرة الطوبولوجية T) يوجد $x \epsilon X$ بحيث $xt \neq x$.

انظر **زمرة تحويلية وزمرة طوبولوجية**.

لتكن $G=\{\Pi^t:t\epsilon T\}$ حيث $\Pi^t(x)=\Pi(x,t)$ وليكن $\lambda:T\rightarrow G$ دالة معرفة بالقانون $\lambda(t)=\Pi^t$ لكل $t\epsilon T$. فإن λ تكون تشاكلاً من T على G (تشاكل بالنسبة للزمر). وتكون λ دالة متباينة إذا وفقط إذا كانت (X,T,π) فعالة أي أن زمرة التماثلات المستمرة تتطابق (جوهرياً) مع الزمر التحويلية الفعالة.

فعل ACTION

هو من مفاهيم الديناميك المتقدم، ويتم تعريفه بواسطة التكامل

$$A = \int_{p_1}^{p_2} m\vec{v}.d\vec{r}$$

ويدعى هذا التكامل تكامل الفعل، حيث m هي كتلة الجسيم، $\vec{v}$ سرعته، و$d\vec{r}$ هو العنصر المتجهي لقوس المسار الذي يصل النقطتين p_1,p_2 أما $\vec{v}.d\vec{r}$ فنعني به الجداء النقطي لهذين المتجهين.

● **قانون الفعل ورد الفعل:**

هو القانون الأساسي في الميكانيك والذي يقول إنه إذا تفاعل جسيمان تكون القوى التي يؤثر بها كل منهما على الآخر متساوية في المقدار، تفعل على الخط الواصل بينهما وتكون متعاكسة من حيث الاتجاه.

● **مبدأ الفعل الأصغر:**

لنأخذ كل المنحنيات التي تمر بنقطتين ثابتتين في جوار المسار الطبيعي، والتي يسير عليها الجسيم بمعدل يكون معه لكل من هذه المنحنيات (وفي كل لحظة من الزمن)، يكون مجموع الطاقة الحركية وطاقة الكمون ثابتاً، ويكون المسار الطبيعي للجسيم هو ذلك المسار الذي يأخذ عليه تكامل الفعل قيمة تطرفية.

فِعْل

● **فعل زمرة:**

انظر مدار؛ فعال؛ حر ـ فعل حر.

فعلي PROPER

● عامل فعلي:

انظر عامل عدد صحيح.

● كسر فعلي:

انظر كسر.

● مجموعة جزئية فعلية:

انظر مجموعة جزئية.

فعلياً

● منقطع فعلياً:

انظر منقطع.

فعلياً PROPERLY

● محتواه فعلياً:

انظر مجموعة جزئية.

● متسلسلة متباعدة فعلياً:

انظر متباعد ـ متسلسلة متباعدة.

فهرنهايت، غابرييل دانييل FAHRENHEIT

عالم فيزيائي ولد في بولندا وعاش في بريطانيا وهولندا.

● ميزان فهرنهايت للحرارة (محرّ فهرنهايت):

هو ميزان للحرارة (أو محر) مدرج بحيث تكون فيه درجة تجمد الماء عند 32° ودرجة غليانه عند 212°.

انظر درجة مئوية ـ ميزان مئوي للحرارة (أو محرّ مئوي).

أما العلاقة بين درجة الحرارة المئوية c ودرجة الحرارة وفق نظام فهرنهيت F فتعطى بالشكل: $\frac{5}{9}(F - 32) = c$

FUBINI, GUIDO (1879-1943) فوبيني، غويدو

رياضي إيطالي اشتغل في الجبر والتحليل والهندسة التفاضلية الاسقاطية.

● **مبرهنة فوبيني:**

لنفرض أن m_1 و m_2 قياسان معرّفان على الفضاءين X و Y وأن $m_1 \times m_2$ هو قياس الجداء على $X \times Y$. فإن مبرهنة فوبيني تنص على أنه إذا كانت الدالة h قابلة للمكاملة على $X \times Y$ فإن المجموعة الجزئية من Y والتي تكون عندها $g(x)=h(x,y)$ غير قابلة للمكاملة على X لها قياس مقداره الصفر وعلى أن المجموعة الجزئية من X والتي تكون عندها $f(y)=h(x,y)$ غير قابلة للمكاملة على Y لها قياس مقداره الصفر أيضا.

كما أن $\int h\, d(m_1 \times m_2) = \int F dm_1 = \int G dm_2$ حيث

$$F(x) = \int h(x,y) dm_2$$

$$G(y) = \int h(x,y) dm_1$$

فإذا كانت S مجموعة جزئية من $X \times Y$ وعرفنا S_y على أنها المجموعة المكونة من كل النقاط x في X بحيث $(x,y) \in S$ فإن العبارة التالية تعتبر أحياناً جزءاً من مبرهنة فوبيني: «إذا كانت S مجموعة جزئية من $X \times Y$ قابلة للقياس فإن مجموعة النقاط y في Y بحيث تكون S_y غير قابلة للقياس لها قياس مقداره الصفر».

انظر سيربينسكي ـ مجموعة سيربينسكي.

فوثنائي الدرجة

فوثنائي الدرجة أو الفوسطح الثنائي الدرجة هو مجموعة جزئية F في الفضاء الاقليدي E^n ذي البعدية n والتي تحقق نقاطها $(x_1,\ldots,x_n)$ المعادلة التالية من الدرجة الثانية:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + C = 0$$

حيث c, b_i, a_{ik} أعداد حقيقية.

ومن دون أن نخسر التعميم بإمكاننا اعتبار المصفوفة $A=(a_{ik})$ متناظرة.
وإذا كان $n=2$ فإن F تكون مخروطياً.
وعلى سبيل المثال نأخذ $a_{11}=1, a_{12}=a_{21}=0, a_{22}=-1$ ونأخذ $C=-1, b_1=b_2=0$ فإن الفوثنائي الدرجة F يكون:

$$F = \{(x_1,x_2)\epsilon E^2/x^2_1 - x^2_2 - 1 = 0\}$$

ويكون F بذلك قطعاً زائداً.

فوق الملاصق SUPEROSCULATING

● **منحنيات فوق ملاصقة على سطح:**
هي مقاطع ناظمية لسطح لها مرتبة تلامس مع دوائر تقوسها أعلى من مقاطع أخرى.

فوق الملاصقة SUPEROSCULATION

هي خاصية أن يكون لبعض أزواج المنحنيات أو السطوح مرتبة تلامس أعلى من أزواج أخرى.

فوق توافقي SUPERHARMONIC

● **دالة فوق توافقية:**
هي دالة حقيقية f بمتغير واحد أو أكثر بحيث تكون f - دالة تحت توافقية. انظر **تحت توافقي**.

فوق جمعي SUPERADDIVE

انظر **جمعي**: دالة جمعية.

فولتا، الّساندرو جيوسيب انطونيو
VOLTA, ALLESANDRO GIUSEPPE ANTONIO ANASTASIO (1745-1827):

فيزيائي إيطالي ومخترع البطارية الكهربائية.
وقد سميت وحدة الكهرباء (فولت) باسمه.

رياضي فرنسي في التحليل والفيزياء الرياضية. وقد قدّم كثيراً من الدراسات القيمة جداً في الفيزياء الرياضية.

وقد حملت كثيراً من المبرهنات اسمه تكريماً له.

● **تحويل فورييه:**

نعرف الدالة f(x) على أنها تحويل فورييه للدالة g إذا كان

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{itx}dt$$

(يحذف بعض المؤلفين العدد $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ من التعريف).

وضمن بعض الشروط التي سترد في مبرهنة فورييه التكاملية فإن

$$g(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$$

حيث تعطى قيمة الطرف الأيمن بالعبارة

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2} [g(x+h) + g(x-h)]$$

إذا كانت الدالة g ذات تغير محدود بجوار x.

ونسمي f و g زوج تحويلات فورييه.

نقول بأن الدالة f هي **تحويل جيب تمامي لفورييه** للدالة g إذا كان

$$f(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} g(t) \cos xt \, dt$$

كما نقول بأن f هي تحويل جيبي لفورييه للدالة g إذا كان

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} g(t) \sin xt \, dt$$

ويمكن أن نرى هنا أن هذين التحويلين معاكسان لنفسيهما.

● **مبرهنة فوريه:**

لتكن f و |f| قابلتين للمكاملة على $[-\pi,\pi]$ ولنفرض أنه قد تم تمديد f خارج الفترة التي تحوي جميع قيم x في $-\pi < x \leq \pi$ بحيث تصبح f دوروية ذات دور 2π. إذا تحقق واحد من الشروط التالية من (i) إلى (v) وإذا عرفنا a_n و b_n بالعلاقتين:

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

عندئذ فإن المتسلسلة $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

تتقارب إلى $f(x)$ إذا كان f مستمراً في x وتتقارب إلى

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$$

سواء كان f مستمراً أو غيرمستمر في x، حيث تشير $f(x+)$ إلى نهاية f عند الاقتراب إلى x من اليمين و $f(x-)$ إلى نهاية f عند الاقتراب إلى x من اليسار.

أما الشروط التي يجب أن يتحقق واحد منها فهي:

(i) (شرط ديريخليه) أن تكون الدالة f محدودة ولها عدد منته من القيم العظمى والصغرى وعدد منته من الانقطاعات في الفترة $[-\pi,\pi]$.

(ii) أن توجد فترة I تقع x في منتصفها بحيث تكون f فيها محدودة وبحيث تكون f رتيبة في كل نصف مفتوح من I.

(iii) (شرط جوردان) أن يوجد جوار لـ x تكون فيه الدالة ذات تغير محدود.

(iv) (شرط ديني) أن يكون كل من $f(x-)$، $f(x+)$ موجوداً وأن يوجد عدد موجب δ بحيث تكون الدالة

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} \right|$$

قابلة للمكاملة على $[-\delta,\delta]$.

(v) أن تكون الدالة f قابلة للمفاضلة من اليمين ومن اليسار عند x.
انظر فيجر ـ مبرهنة فيجر.

● **مبرهنة فوربيه التكاملية:**

إذا كان للدالة f عدد منته (على الأكثر) من نقط الانقطاع اللانهائية وكانت f قابلة للمكاملة في كل فترة منتهية لا تحتوي أي نقطة من نقط الانقطاع، وإذا كان $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$

موجوداً فإنه يمكن تمثيل الدالة f(x) بالعلاقة

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos t(x - s)\, ds$$

حيث تعطى قيمة الطرف الأيمن من هذه العلاقة بالشكل

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{1}{2} [f(x + h) + f(x - h)]$$

إذا كانت f ذات تغير محدود بجوار x.

● **متسلسلة فوربيه:**

هي متسلسلة من الشكل

$$\tfrac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$

أو
$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

بحيث توجد دالة f(x) تحقق من أجل $n \geq 0$ العلاقة

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

وتحقق من أجل $n \geq 1$ العلاقة

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

أما الصفة المميزة لمتسلسلة فوربيه فهي أنها تستخدم للتعبير عن دالة معرفة بعبارات مختلفة في أجزاء مختلفة من المجال على أن تخضع هذه العبارات إلى شروط غير قاسية. انظر مبرهنة فوربيه.

ولما كان دور الجيب وجيب التمام هو 2π فإن دور متسلسلة فورييه هو 2π.

مثال: بفرض أن $f(x) = 1$ عندما $-\pi \leq x \leq 0$ و $f(x) = 2$ عندما $0 < x \leq \pi$ فإن

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} 2dx = 3\pi$$

حيث نرى أن $a_0 = 3$.

وبصورة مشابهة نجد $a_n = 0$ من أجل جميع n بينما $b_n = 0$ عندما n عدد زوجي و $b_n = \frac{2}{\pi n}$ عندما تكون n فردية. وهكذا نجد

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots)$$

ونشير إلى أنه يمكن اشتقاق متسلسلات أخرى من متسلسلة فورييه من أجل مدى يختلف عن $(-\pi,\pi)$.

أنظر متعامد.

● **متسلسلة نصف المدى لفورييه:**

هي متسلسلة فورييه من الشكل

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\pi} a_n \cos nx = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots$$

أو من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots$

وتسمى هاتان المتسلسلتان عادة متسلسلة الجيب ومتسلسلة جيب التمام.

ولما كانت متسلسلة جيب التمام زوجية فإن متسلسلة جيب التمام تمثل دالة f في كامل الفترة $-\pi < x < \pi$ فقط إذا كانت الدالة f زوجية أي $f(-x) = f(x)$.

كما نرى بصورة مشابهة أن متسلسلة الجيب تمثل دالة في الفترة $-\pi < x < \pi$ فقط إذا كانت f دالة فردية أي $f(-x) = -f(x)$ وذلك لأن دالة الجيب فردية.

فوسّ، أرول ادموند — VOSS, AUREL EDMUND (1845-1931)

رياضي ألماني اختص بالهندسة التفاضلية.

انظر سطح ـ سطح فوسّ.

فولط — VOLT

وحدة قياس القوة المحركة الكهربائية، وهناك نوعان من الفولط:

(1) **الفولط المطلق**: وهو فرق الجهد الكهربائي الراسخ الذي يجب تواجده عبر موصّل يحمل تياراً راسخاً قدره أمبير مطلق واحد والذي يولد طاقة حرارية بمعدل واط واحد، وكان الفولط المطلق الوحدة القانونية المستخدمة لفرق الجهد قبل عام 1950.

(2) **الفولط الدّولي**: وهو الوحدة القانونية بعد عام 1950 ويساوي فرق الجهد الكهربائي الراسخ الذي يجب تواجده عبر موصّل مقاومته أوم دولي واحد ويحمل تياراً راسخاً قدره أمبير دولي واحد. إن العلاقة بين الفولط المطلق والدولي هي:

1 فولط دولي = 1.000330 فولط مطلق.

فولتيرا، فيتو — FOLTERRA, VITO (1860-1940)

عـالـم إيطالي في التحليل والفيزياء، قام بالقسط الأكبر من تطوير المعادلات التفاضلية التكاملية والتحليل الدالي.

- **معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول**:

هي المعادلة $f(x) = {}_a\int^x k(x,t)\, y(t)\, dt$.

- **معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني**:

هي $y(x) = f(x) + \lambda\, {}_a\int^x k(x,t)\, y(t)\, dt$ حيث f و k هما دالتان معلومتان بينما y(x) هي دالة مجهولة. وتسمى الدالة k **نواة المعادلة**. وتكون معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني متجانسة إذا كان $f(x) \equiv 0$. انظر آبل ـ مسألة آبل.

● **دالتا فولتيرا المقلوبتان:**

هما دالتان $k(x,y)$ و $k(x,y;\lambda)$ **تحققان:**

$$k(x,y) + k(x,y;\lambda) = \lambda \int_a^b k(t,y)\, k(x,t;\lambda)\, dt$$

وإذا كان **معين فريدهولم** $D(\lambda) \neq 0$ وكانت $k(x,y)$ مستمرة في x و y فإن:

$$k(x,y;\lambda) = -\frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)}$$

حيث $D(x,y;\lambda)$ **هو صغير فريدهولم** الأول. إذا كان g حلاً للمعادلة:

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, g(t)\, dt$$

فإن f هو حل المعادلة $f(x) = g(x) + \int_a^b k(x,t)\, g(t)\, dt$، فإن f هو حل المعادلة $f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y;\lambda)\, f(t)\, dt$ وبالعكس.

تسمى الدالة $k(x,y;\lambda)$ **نواة مفككة**. ونشير إلى أن كل ما سبق يصح عندما $\lambda = 1$.

انظر نواة.

● **حل فولتيرا لمعادلات فولتيرا التكاملية:**

إذا كانت الدالتان f و k مستمرتين في المتغير x في الفترة $a \le x \le b$ وفي المتغير t في الفترة $a \le t \le x \le b$ فإن لمعادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, y(t)\, dt$ حلاً وحيداً مستمراً معطى بالعلاقة:

$$y(x) = f(x) + \int_a^x k(x,y;\lambda)\, f(t)\, dt$$

حيث $k(x,t;\lambda)$ هي نواة مفكّكة للنواة المعطاة $k(x,y)$ ومستمرة في x و t في الفترة $a \le t \le x \le b$. أما معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول $f(x) = \int_a^x k(x,t)\, y(t)\, dt$، فيمكن أن تؤول إلى معادلة من النوع الثاني بالمفاضلة حيث نحصل على:

$$f'(x) = \lambda\, k(x,y)\, y(x) + \lambda \int_a^x \frac{\partial\, k(x,t)}{\partial x}\, y(t)\, dt$$

نفترض هنا سلفاً أن $\frac{\partial\, k(x,t)}{\partial x}$ موجود ومستمر.

فون نويمان، جون VON NEUMANN JHON (1903-1957)

رياضي ولد في المجر ودرس في برلين وهامبرغ ثم هاجر إلى الولايات المتحدة الأميركية. اشتغل بالرياضيات البحتة والتطبيقية والاقتصاد الرياضي. أوجد نظرية المباريات وأسهم في نظرية الكم والنظرية المسرانية ونظرية الحاسب الآلي والبرمجة الخطية ونظرية الاحتمال والمنطق. كذلك أسهم في نظرية المؤثرات على فضاء هيلبرت ونظرية الزمر المستمرة.

في INTO

انظر على.

في المئة PERCENT or PER CENT

أجزاء من المئة يرمز لها بالرمز % فمثلاً 5% تعني $\frac{5}{100}$.

- **زيادة مئوية أو نقصان مئوي:**

عند زيادة كمية من x إلى y فإن نسبة الزيادة المئوية هي $(\frac{y-x}{x})100$ وإذا نقصت كمية من x إلى y فإن نسبة النقصان المئوية هي $(\frac{x-y}{x})100$.

- **خطأ مئوية:**

انظر خطأ.

- **الربح المئوي على الكلفة.**

يقصد به النسبة $(\frac{s-c}{c})100$ حيث c سعر الكلفة و S سعر البيع.

- **الربح المئوي على البيع:**

نقصد به النسبة $(\frac{s-c}{s})100$.

- **معدل مئوي:**

هو المعدل مضروب بـ 100.

فيبلن، اوزوالد — VEBLEN, OSWALD (1880-1960)

رياضي أميركي اختص بالهندسة الإسقاطية والطوبولوجيا.
أنظر جوردان ــ مبرهنة منحنى جوردان.

فيبوناتشي، ليوناردو — FIBONACCI (1250-1170)

هو رياضي إيطالي اشتغل في نظريتي الأعداد والجبر.

● **متتالية فيبوناتشي:**

هي المتتالية u_n المعرفة كالتالي: $u_2 = 1, u_1 = 1$
$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ لكل $n \geq 3$ أي هي متتالية الأعداد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

وتنتهي النسبة بين أي عدد فيبوناتشي والذي يسبقه مباشرة إلى العدد $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ وهو حل المعادلة $x = 1 + \frac{1}{x}$، وبالتالي فإن المتتالية $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, 13/8, \ldots$ تقترب من $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.
انظر فاري ــ متتالية فاري.

فيتالي، جيوسيب — VITALI, GIUSEPPE (1875-1932)

رياضي إيطالي اشتغل في التحليل ونظرية المجموعات.

● **غطاء فيتالي:**

لتكن S في فضاء إقليدي بعديته n وليكن J صنفاً من المجموعات بحيث يوجد لكل نقطة x في S عدد موجب $\alpha(x)$ ومتتالية من المجموعات $\{U_1, U_2, \ldots\}$ التي تنتمي لـ J بحيث يكون $x \in U_i$ لكل i ولها الخواص التالية:

(1) $\lim_{n\to\infty} \text{Diam}(U_n) = 0$ أي أن أقطار U_i تؤول إلى الصفر.

(2) لكل عدد صحيح n يوجد مكعب c_n يحتوي على U_n وبحيث يكون $m(U_n) \geq \alpha(x)m(C_n)$ ‏ $m(c_n), m(U_n)$ تدل على قياس U_n و c_n على الترتيب.

وفي هذه الحالة فإن J يسمى غطاء فيتالي لـ S.

● **مبرهنة الغطاء لفيتالي:**

لتكن S مجموعة جزئية من فضاء إقليدي بعديته n. إذا كان الصنف J من المجموعات المغلقة غطاء فيتالي لـ S فإنه يوجد متتالية منتهية أو لا منتهية وقابلة للعد من المجموعات المنفصلة زوجياً المنتمية لـ J بحيث يحتوي اتحادها على كل S ما عدا مجموعة قياسها صفر.

● **مجموع فيتالي:**

هي مجموعة A من الأعداد الحقيقية تحقق الشرطين التاليين:

(1) إذا كان $a,b \epsilon A$ فإن $a - b$ (أو $b - a$) ليس عدداً منطقاً.

(2) إذا كان x عدداً حقيقياً فإنه يوجد عدد منطق z و $b \epsilon A$ بحيث $x = z + b$.

ويمكن تكوين هذه المجموعة باختيار عنصر واحد فقط من كل **مجموعة مشاركة** للأعداد المنطقة على اعتبار أنها زمرة جزئية من الزمرة الجمعية للأعداد الحقيقية. ومجموعة فيتالي غير قابلة للقياس كما أن تقاطعها مع فترة ما، إما أن يكون غير قابل للقياس أو أن يكون مقياسه صفراً.

انظر **سيبربنسكي — مجموعة سيبربنسكي**.

فيثاغورس — PYTHAGORAS OF SAMOS (500-580)

رياضي وفيلسوف يوناني. قال بأن أعمق أعماق الحقيقة هو رياضي وحاول أن يفسر كل شيء مستخدماً الأعداد.

● **نجم فيثاغورس الخماسي:**

انظر نجم خماسي.

● **متطابقات فيثاغورس:**

انظر **مثلثات**.

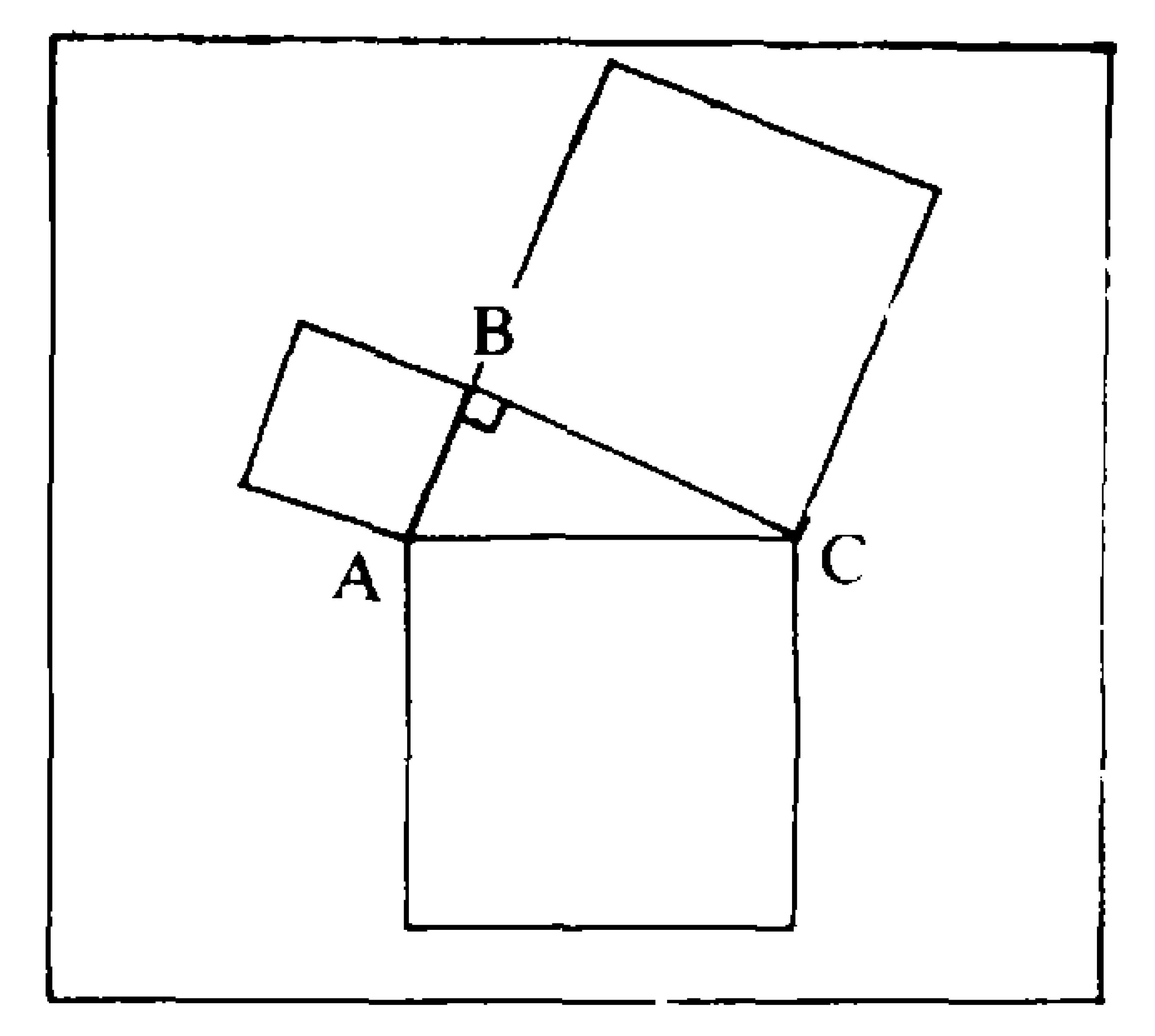
- **أعداد فيثاغورس:**

هي أي مجموعة من ثلاثة أعداد موجبة x,y,z تحقق العلاقة $x^2 + y^2 = z^2$ مثل 3,4,5، وتعطى جميع هذه الأعداد بالشكل $m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2$ حيث m و n عددان اختياريان موجبان بحيث $m \neq n$.

- **علاقة فيثاغورس بين جيوب تمام التوجيه:**

إذا كانت $\cos\gamma$ و $\cos\beta$ و $\cos\alpha$ هي جيوب تمام التوجيه لمستقيم (لمتجه) ما فإن:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



- **مبرهنة فيثاغورس:**

ليكن لدينا المثلث ABC القائم في B عندئذٍ فإن $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ويعني ذلك هندسياً أن مساحة المربع المقام على وتر المثلث القائم يساوي مجموع مساحتي المربعين المقامين على الضلعين القائمين.

فيجر، ليوبولد — FEJER, LEOPOLD (1880-1959)

عالم رياضيات هنغاري عمل في حقلي المتغيرات العقدية وتجميعية المتسلسلات.

- **مبرهنة فيجر:**

إذا كانت f دالة مستمرة ودورية ذات دور 2π (أي $f(x + 2\pi) = f(x)$)، وإذا كانت $\{\sigma_n\}$ متتالية من **الأوساط الحسابية** للمجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه المرتبطة بالدالة f، فإن $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$ بانتظام لكل قيم x.

فيرارو، لودفيكو — FERRARI (or FERRARO) (1565-1577)

رياضي إيطالي أول من حل المعادلة العامة الرباعية الدرجة في متغير واحد.

● حل فيرارو لرباعية الدرجة:

وتعتمد طريقة فيرارو في حل المعادلة الرباعية الدرجة:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

على إثبات أن جذور هذه المعادلة هي جذور المعادلتين $x^2 + \frac{1}{2}px + k = \pm(ax + b)$، حيث $a = (2k + \frac{1}{4}p^2 - q)^{\frac{1}{2}}$

$b = (kp - r)/2a,$ ونحصل على k من حل المعادلةالتكعيبية:

$$k^3 - \frac{1}{2}qk^2 + \frac{1}{4}(pr - 4s)k + \frac{1}{8}(4qs - p^2s - r^2) = 0$$

فيرسيرا VERSIERA

نفس ساحرة أغنيسي.

انظر ساحرة.

فيرما، (بيير) (١٦٠١ ــ ١٦٦٥) FERMAT, PIRREDE (1601-1665)

هو العلامة الفرنسي الذي اشتهر بسبب أبحاثه الخلاقة في نظرية الأعداد. ولقد فهم وطبق فكرة حسبان التفاضل الرائدة قبل أن يولد كل من نيوتن وليبنز. ويعتبر (مع باسكال) بحق مؤسس نظرية الاحتمالات. وكمكتشف (مع ديكارت) للهندسة التحليلية فإنه يعتبر بلا شك من أوائل الرياضيين المجددين.

● آخر مبرهنة لفيرما:

وتنص هذه المبرهنة على أنه ليس هناك حل في الأعداد الصحيحة الموجبة للمعادلة $x^n + y^n = z^n$، حيث n عدد صحيح أكبر من 2. ولم يستطع أحد حتى الآن البرهنة على صحة هذه المبرهنة، ولكنها قد برهنت في الحالتين الخاصتين التاليتين:

حالة (1): ليس للأعداد x و y و z أي عامل مشترك مع n إلا إذا كان n أكبر من 3×10^9 وأصغر الأعداد x و y و z أكبر من $\frac{111}{7}n(2n^2 + 1)^n$.

حالة (2): لأحد الأعداد x و y و z عامل مشترك مع n إلا إذا كان n أكبر من 25000.

● **أعداد فيرما:**

هي الأعداد التي على الشكل:

$$F_n = (2)^{2^n} + 1. \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$F_1 = (2)^2 + 1 = 5$$

$$F_2 = (2)^4 + 1 = 16 + 1 = 17,$$

$$F_3 = (2)^8 + 1 = 257$$

$$F_4 = (2)^{16} + 1 = 65537$$

وظن فيرما خطأً أن كل هذه الأعداد أعداد أولية غير أن $F_5 = 429496727$ عدد غير أولي. ويمكن إنشاء مضلع نظامي له P ضلعاً حيث P عدد أولي باستخدام المسطرة والفرجار فقط إذا وفقط إذا كان p من أعداد فيرما.

● **حلزون فيرما:**

انظر **مكافيء ــ حلزون مكافئي**.

● **مبدأ فيرما:**

وينص هذا المبدأ على أن الوقت الذي يستغرقه شعاع ضوء للوصول من نقطة x لأخرى y في مساره **الفعلي** هو أقل من الوقت الذي يستغرقه الشعاع للوصول من x إلى y في أي مسار آخر. ولقد استخدم **برنولي** هذا المبدأ لحل **مسألة أصغري الزمن**.

انظر **أصغري الزمن**.

● **مبرهنة فيرما:**

إذا كان كل من p و a عدداً صحيحاً موجباً و p عدداً أولياً و a أولياً بالنسبة لـ p فإن باقي القسمة a^{p-1} على p هو 1. أي أن $a^{p-1} \equiv 1$ (مقياس p).

فمثلاً $2^4 \equiv 1$ (مقياس 5)، حيث $p = 5$ و $a = 2$.

انظر **تطابق**.

FISHER, RONALD AYLMER (1890-1962) فيشر، رونالد آيلمر

هو إحصائي بريطاني.

● **معامل فيشر:**

هو تحويل معامل الترابط $z(r) = \frac{1}{2} \mathrm{Log}_e \frac{1+r}{1-r} = \tan h^{-1} r$، حيث r **معامل الترابط**. وإذا كانت العينات العشوائية مأخوذة من مجتمع إحصائي طبيعي فإن توزيع z يقترب من الطبيعية أكثر سرعة من اقتراب معامل الترابط نفسه. **ويقترب وسط** z من المقدار $z(\rho)$، أما **التباين فيقارب** الكمية $\frac{1}{(n-3)}$، حيث يكون حجم المجتمع الإحصائي n كبيراً وحيث ρ معامل ترابط المجتمع الإحصائي.

● **توزيع z لفيشر:**

انظر F ــ توزيع F.

FIELDS (1932-1863) فيلدز، جون تشارلز

رياضي كندي اشتغل في حقل التحليل. وكرئيس للمؤتمر الدولي للرياضيين المعقود في تورنتو سنة 1924 قدم اقتراحاً باستخدام الأموال المتبقية بعد انتهاء كل مخصصات مؤتمر لتقديم جوائز مالية وأوسمة لأحسن الرياضيين الشبان والذين لا تتجاوز أعمارهم الأربعين. وأقر اقتراح فيلدز في المؤتمر الدولي الذي عقد في زيوريخ سنة 1932 وقدمت أول الجوائز سنة 1936 بأوسلو إلى كل من **دوغلاس وألفر**. ثم شفارتز وسيلبرغ سنة 1950 (بكامبردج ــ ماستشيوستس) وروث وتوم (ادنبرغ 1958) وهورماندر وميلنور (ستوكهولم 1962) وعطية وكوهين وغروثندك وسميل (موسكو 1966) وبيكر وهيروناكا ونوفيكوف وتومبسون (نيس 1970) وبمبيري وممفورد (فانكوفر 1974) وتسمى هذه الجوائز بجوائز فيلدز.

فييت، فرانسوا VIETE, FRANÇOIS (FRANÇISCUS VIETA) (1540-1603)

رياضي فرنسي مشهور اختص في الجبر والحساب والهندسة والتحليل الجبري. استخدم الحروف لتمثيل الثوابت والمتغيرات. رفض استخدام الأعداد السالبة. أوجد حل مثلثاتي للمعادلة التكعيبية العامة بمتغير واحد.



قائم	RECTANGULAR

● قطع زائد قائم :

انظر قطع زائد .

قائم	RIGHT

● زاوية قائمة :

انظر زاوية .

● مخروط دائري قائم :

انظر مخروط .

● زاوية ازدواجية قائمة :

انظر مستوى ــ زاوية مستوية لزاوية زوجية .

● مقطع قائم لسطح :

انظر مقطع .

● مثلث قائم :

انظر كروي ــ مثلث كروي ، وانظر مثلث .

قابل للاختزال	REDUCIBLE

نقول عن منحنى أو سطح أنه قابل للاختزال في منطقة ما إذا كان بالامكان أن ينكمش إلى نقطة وذلك بواسطة تشوه ودون أن يخرج من المنطقة .

انظر تشوه ــ تشوه مستمر؛ ومتصل ــ منطقة بسيطة الاتصال.

● **تحويل قابل للاختزال:**

ليكن T تحويلاً خطياً في فضاء خطي L. نقول عن T إنه قابل للاختزال إذا كان هناك مجموعتان خطيتان جزئيتان M,N في L بحيث يكون L مجموعهما المباشر، أي أن $L = M \oplus N$ وتكون كل من M,N لامتغيرة تحت تأثير T.

واضح أننا في هذه الحالة نستطيع تحديد T عن طريق وصف تأثيره على M و N فقط.

إذا كان لدينا **فضاء هلبرت** فإنه من المعتاد أن نطلب أيضاً أن يكون M و N متعامدين ويكون كل منهما في هذه الحالة المتمم العمودي للآخر. ويكون T هنا قابلاً للاختزال إذا وفقط إذا كان قرينه T^* يأخذ M إلى M أو إذا وفقط إذا، كان T يتبادل مع الاسقاط العمودي الذي مداه M.

● **كثير حدود قابل للاختزال:**

في مجال أو حقل معين: هو كثير حدود يمكن كتابته كحاصل ضرب كثيري حدود درجتهما واحد على الأقل ومعاملاتهما في هذا المجال أو الحقل.

انظر **لامختزل** ــ كثير حدود لامختزل.

● **مجموعة مصفوفات قابلة للاختزال:**

نقول عن مجموعة مصفوفات قابلة لتحويلات خطية في فضاء المتجهات V ذي البعدية n أنها قابلة للاختزال إذا كان هناك مجموعة جزئية فعلية V' في V وفيها عنصر على الأقل غير الصفر وتكون لامتغيرة تحت تأثير مجموعة التحويلات، أي أن أي عنصر في V' يتحول إلى عنصر في V' تحت تأثير التحويلات المقابلة لمصفوفات المجموعة.

انظر **تمثيل** ــ تمثيل مجموعة قابلة للاختزال.

قابل للازالة — REMOVABLE

● **انقطاع قابل للازالة:**

انظر **انقطاع**.

نقول أن المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_k$ قابلة للاستبدال إذا كان

$$Pr(X_1 \le a_1, X_2 \le a_2, \ldots, X_k \le a_k) = Pr(X_{i_1} \le a_1, X_{i_2} \le a_2, \ldots, X_{i_k} \le a_k)$$

من أجل كل تبديل $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ للأعداد الصحيحة، ولأجل كل الأعداد الحقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

مثال: إن المتغيرات العشوائية X_1, X_2, X_3 قابلة للاستبدال إذا تحقق من أجل كل مجموعة أعداد حقيقية a_1, a_2, a_3 ما يلي:

$$\begin{aligned} Pr(X_1 \le a_1, X_2 \le a_2, X_3 \le a_3) &= Pr(X_1 \le a_1, X_3 \le a_2, X_2 \le a_3) \\ &= Pr(X_2 \le a_1, X_1 \le a_2, X_3 \le a_3) \\ &= Pr(X_2 \le a_1, X_3 \le a_2, X_2 \le a_3) \\ &= Pr(X_3 \le a_1, X_1 \le a_2, X_2 \le a_3) \\ &= Pr(X_3 \le a_1, X_2 \le a_2, X_1 \le a_3) \end{aligned}$$

قابل للاسقاط

- **حقل متجهات قابل للاسقاط:**

إذا كان $f: M \to N$ غمراً من المنطوى التفاضلي M إلى المنطوى التفاضلي N وكان X حقل متجهات على M فإننا نقول إن X **قابل للاسقاط** إذا كان هناك حقل متجهات Y على N بحيث $f_*(X_m) = Y_{f(m)}$ وذلك لكل $m \in M$.

- **مقاس قابل للإسقاط:**

إذا كان $f: M \to N$ غمراً من المنطوى التفاضلي M إلى المنطوى التفاضلي N وكانت بعدية M تساوي بعدية N فإننا نقول بأن المقاس الريماني g على M قابل للاسقاط إذا كان $g_{m_1}(v_1, w_1) = g_{m_2}(v_2, w_2)$ كلما كان $f(m_1) = f(m_2)$ وكان $f_* v_1 = f_* v_2, f_* w_1 = f_* w_2$ حيث f_* تفاضل f.

وعندما يكون المقاس g قابلاً للاسقاط نستطيع أن نستعمل g لنحدث مقاساً على N ونسمي هذا المقاس بالمقاس المحدث تحت تأثير f.

قابل للانبساط DEVELOPABLE

● **سطح قابل للانبساط:**

هو غلاف عائلة مستويات بوسيط واحد.

هو سطح يمكن بسطه أو نشره على مستوى دونما مطٍ أو انكماش. سطح يكون تقوسه الكلي مطابقاً للصفر.

● **قابل الانبساط القطبي لمنحنى فضائي:**

هو غلاف المستويات الناظمة للمنحنى أو هو مجموع النقاط الواقعة على الخطوط القطبية للمنحنى.

انظر ناظم.

● **قابل الانبساط المقوّم لمنحنى فضائي:**

هو غلاف المستويات المقوّمة للمنحنى الفضائي C. السطح القابل للانبساط S يسمى قابل الانبساط المقوّم للمنحنى C لأن عملية بسط S على مستوي تنتج عن نشر C على مستقيم.

انظر مقوّم ــ مستوى مقوّم لمنحنى فضائي عند نقطة.

قابل للتحصيص APPORTIONABLE

● **دفعة سنوية قابلة للتحصيص:**

انظر دفعة سنوية.

قابل للتحليل إلى عوامل FACTORABLE

يقال في علم الحساب إن العدد **قابل للتحليل إلى عوامل** إذا احتوى على عوامل لا تساوي الوحدة أو العدد نفسه.

أما في الجبر فإنه يقال إن كثير الحدود **قابل للتحليل إلى عوامل** إذا احتوى على عوامل لا تساوي ثابتاً أو كثير الحدود نفسه.

فمثلاً $x^2 - y^2$ قابل للتحليل إلى عوامل في مجال الأعداد الحقيقية بينما لا يكون $x^2 + y^2$ كذلك.

قابل للتراكب SUPERPOSABLE

● **تشكلات قابلة للتراكب:**

تشكلات يمكن أن نراكب أحدهما على الآخر.

مرادف: متطابق.

قابل للتقدير ESTIMABLE

ليكن X متغيراً عشوائياً يعتمد في توزيعه الاحتمالي على وسيط مجهول θ (قد يكون θ متجهاً) ولتكن $X_1,X_2,\ldots,X_n$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع X. نقول إن الدالة $g(\theta)$ (أية دالة في الوسيط θ) **قابلة للتقدير** إذا وجد مقدّر $\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ بحيث أن $E[\phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)] = g(\theta)$ لأجل جميع قيم θ الممكنة.

وبعبارة أخرى فإن $g(\theta)$ قابلة للتقدير إذا وجد لها مقدّر غير متحيّز.

مثال: ليكن x متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بوسط μ وتباين σ^2. إن الدالة $g(\mu,\sigma^2) = (\mu,\sigma^2)$ قابلة للتقدير لأنه يوجد لها مقدّر غير متحيّز هو مثلاً

$$\phi(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (x_1,(x_1 - x_2)^2/2)$$

وليس هذا هو المقدر غير المتحيز الوحيد بل يوجد مقدر آخر أكثر كفاءة منه هو $\phi^*(x_1,x_2,\ldots,x_n) = [\Sigma x_i/n, \Sigma(x_i - \bar{x})^2/(n-1)]$

ونعرّف درجة الدالة القابلة للتقدير بأنها أصغر حجم عينة $m(m \geq 1)$ يقبل استخراج مقدر منصف للدالة. ففي المثال السابق تكون درجة $g(\mu,\sigma) = (\mu,\sigma^2)$ مساوية إلى 2. أما إذا كانت $g_1(\mu,\sigma^2) = \mu$ فإن درجة g_1 تساوي 1.

انظر كفؤ، غير متحيز، مقدّر.

وكل مقدر غير متحيز للدالة $g(\theta)$ محسوب في أصغر حجم عينة ممكن يسمى **نواة** للدالة $g(\theta)$.

قابل للتوازي PARALLELIZABLE

نقول إن النظام الديناميكي (X,R,π) قابل للتوازي إذا كانت هناك مجموعة $S \subset X$ وتماثل مستمر $h:X\to S\times R$ بحيث $\pi(S,R) = X$ و $h(\pi(x,t)) = (x,t)$ لكل $x \in S$ و $t \in R$.

وإذا كانت X متراصة محلياً فإن (X,R,π) يكون قابلاً للتوازي إذا وفقط إذا كان متشتتاً.

انظر **متشتت**.

قابل للجمع SUMMABLE

- **متسلسلة قابلة للجمع مطلقاً:**

نقول أن المتسلسلة Σa_n قابلة للجمع مطلقاً إذا كانت جميع التكاملات

$$_0\int^{\infty} e^{-x}|a(x)|dx,\ _0\int^{\infty} e^{-x}|a^{(m)}(x)|dx$$

موجودة حيث $m = 1,2,3,\ldots$

تشير إلى مرتبة الاشتقاق بينما ... $a(x) = a_0 + a_1x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots$

- **متسلسلة متباعدة قابلة للجمع:**

هي متسلسلة نقابلها بمجموع نحصل عليه بتعريف نظامي لمجموع المتسلسلات المتباعدة. ونشير عادة إلى قابلية الجمع بحسب الطريقة التي نعرفها للجمع، كطريقة تشيزارو.

انظر **تجميع ــ تجميع المتسلسلات المتباعدة**.

- **دالة قابلة للجمع:**

هي نفس الدالة القابلة للمكاملة.

انظر **قابل للمكاملة**.

- **متسلسلة قابلة للجمع بانتظام:**

نقول بأن المتسلسلة ذات الحدود المتغيرة بالنسبة لمتغير ما بأنها قابلة

للجمع بانتظام على مجموعة S باستخدام تعريف معين لجمع المتسلسلات المتباعدة، إذا كانت المتتالية التي تعرف الجمع متقاربة بانتظام على S فالمتسلسلة $\Sigma (-x)^n$ متباعدة من أجل $x = 1$ ولكنها قابلة للجمع بانتظام في الفترة $0 \le x \le 1$ باستخدام أي تعريف نموذجي للجمع مثل تعاريف هولدر أو تشيزارو أو بوريل.

فباستخدام تعريف هولدر نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[1 + (1 - x) + (1 - x + x^2) + \ldots + \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{1}{n} - x\frac{n-1}{n} + x^2\frac{n-2}{n} - \ldots + (-X)^{n-1}\frac{1}{n}]$$

تتقارب بانتظام بالنسبة لـ x على المجال المغلق [0,1].

قابل للحل SOLVABLE

- **زمرة قابلة للحل:**

انظر زمرة.

قابل للعد COUNTABLE

- **مجموعة قابلة للعد:**

(1) هي مجموعة يمكن إيجاد تقابل بين عناصرها وعناصر الأعداد الصحيحة الموجبة.

هي مجموعة يمكن ترتيب عناصرها في متتالية لامنتهية $p_1, p_2, p_3, \ldots$ بحيث لا يرد العنصر سوى مرة واحدة.

كما يقال لهذه المجموعة لامنتهية عدياً.

(2) هي مجموعة إما أن تكون منتهية أو يكون هناك تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

مجموعة الأعداد الصحيحة قابلة للعد وكذلك مجموعة الأعداد المنطقة ومجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

● **امتداد قابل للفصل لحقل**:

ليكن F^* حقلاً يحتوي على الحقل F. فإنه يقال أن $C \in F^*$ قابل للفصل بالنسبة للحقل F إذا كان c صفراً لكثير حدود قابل للفصل ومعاملاته في F.

كما يقال إن F^* قابل للفصل إذا كانت كل عناصره قابلة للفصل. ويعرف **الحقل الكامل** بأنه حقل تكون كل امتداداته المنتهية قابلة للفصل (أي أنه لا يوجد أي كثير حدود قابل للاختزال ومعاملاته في الحقل وله صفر مضاعف).

● **كثير حدود قابل للفصل**:

هو كثير حدود ليس له صفر مضاعف. ويكون كثير الحدود f (والذي معاملاته في الحقل F) قابلاً للفصل إذا وفقط إذا كان القاسم المشترك الأعظم بين f ومشتقها f ثابتاً.

● **الفضاء القابل للفصل**:

هو فضاء طوبولوجي يحتوي على مجموعة W كثيفة وقابلة للعد. أي أن كل مجموعة مفتوحة في الفضاء تحتوي على نقطة من W. ويكون أي فضاء طوبولوجي يحقق **الموضوعة الثانية للعدية فضاء قابلاً للفصل**.

ويعتبر فضاء هيلبرت وأي فضاء إقليدي منتهي البعدية من الأمثلة عل الفضاءات القابلة للفصل.

DIVISIBLE قابل للقسمة

نقول إن الكائن x قابل للقسمة على y إذا وجد كائن q بمواصفات معينة بحيث $x = yq$. فمثلاً يكون العدد الصحيح m **قابلاً للقسمة** على العدد الصحيح n إذا وجد عدد صحيح q بحيث $m = nq$ وكما تكون كثيرة الحدود F **قابلة للقسمة** على كثيرة الحدود G إذا وجدت حدودية Q بحيث $F = GQ$. وهناك عدة اختبارات خاصة لاكتشاف قابلية القسمة عند الأعداد الصحيحة إذا كانت هذه الأعداد مكتوبة على طريقة النظام العشري:

(1) **قابلية القسمة على 2**: يكون العدد الصحيح قابلاً للقسمة على 2 إذا كان الرقم الأخير في العدد قابلاً للقسمة على 2 مثل العدد 35016.

(2) **قابلية القسمة على 3**: يكون العدد الصحيح قابلاً للقسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3. فمثلاً العدد 4728951 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه يساوي 36.

(3) **قابلية القسمة على 4**: يكون العدد الصحيح قابلاً للقسمة على 4 إذا كان العدد المكون من الرقمين الأخيرين يقبل القسمة على 4 مثل العدد 230572.

(4) **قابلية القسمة على 5**: يكون العدد الصحيح قابلاً للقسمة على 5 إذا كان الرقم الأخير إما صفراً أو 5 مثل العددين 7135 و 7130.

(5) **قابلية القسمة على 9**: هذه الحالة شبيهة بالحالة 2 ويكون العدد الصحيح قابلاً للقسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9 مثل العدد 78237.

(6) **قابلية القسمة على 11**: يقبل العدد الصحيح القسمة على 11 إذا كان الفرق بين مجموع الأرقام في المنازل الزوجية ومجموع الأرقام في المنازل الفردية للعدد يقبل القسمة على 11. فمثلاً العدد 5016319 يقبل القسمة على 11، لأن مجموع الأرقام في المنازل الزوجية $0 + 6 + 1 = 7$ ومجموع الأرقام الفردية $5+1+3+9 = 18$ والفرق بين المجموعين يساوي 11.

قابل للقياس MEASURABLE

● **دالة قابلة للقياس**:

نقول بأن الدالة f الحقيقية القيمة قابلة للقياس حسب ليبيغ إذا كانت مجموعة جميع القيم x المعرفة بالمتباينة $f(x) > a$ من أجل أي عدد حقيقي a قابلة للقياس. ويمكن إعطاء تعاريف مشابهة ومكافئة في الحالة التي تكون فيها مجموعة قيم x المعرفة بالعلاقة $f(x) \geq a$ أو $a \leq f(x) \leq b$ قابلة للقياس من أجل أي قيمة a و b. (ويمكن هنا أن نستبدل بالإشارة ≤ الإشارة >). وتكون الدالة

المحدودة المعرفة على مجموعة ذات قياس منته، قابلة للمكاملة إذا كانت هذه الدالة قابلة للقياس. إذا كانت الدالة $g(x)$ قابلة للمكاملة وكان $|f(x)| \leq g(x)$ من أجل جميع قيم x فإن $f(x)$ تكون قابلة للمكاملة إذا كانت قابلة للقياس.
وبشكل عام إذا عرفنا قياساً على جبرية من المجموعات الجزئية لمجموعة X، وإذا كانت f دالة **مجالها** X ومداها محتوياً في فضاء طوبولوجي (مثلاً مجموعة الأعداد الحقيقية أو الأعداد العقدية) فإن هذه الدالة تكون قابلة للقياس إذا كانت مجموعة جميع x المحققة للشرط $f(x) \in U$ قابلة للقياس من أجل أي مجموعة مفتوحة U.

انظر بير ـ دالة بير، انظر **قابل للمكاملة** ـ دالة قابلة للمكاملة؛ وانظر **قياس** ـ قياس مجموعة.

- **مجموعة قابلة للقياس:**

هي مجموعة تقبل قياساً.

انظر **قياساً** ـ قياس مجموعة.

قابل للقيس المشترك — COMMENSURABLE

الكميات القابلة للقيس المشترك هي كميات لها قياس مشترك أي أن هناك قياس موجود عدداً صحيحاً من المرات في كل من الكميتين. مثلاً: الرود ومسطرة طولها ياردة قابلان للقيس المشترك لأن كلاً منهما يحتوي مثلاً على 6 بوصات عدداً صحيحاً من المرات.

نقول عن عددين حقيقيين أنهما قابلان للقيس المشترك إذاً وفقط إذا كانت نسبتهما عدداً منطقاً.

قابلة للمفاضلة — DIFFERENTIABLE

يقال أن الدالة f **قابلة للمفاضلة** عند النقطة x إذا كانت x واقعة في مجال مشتق f. كما يقال إن الدالة f **قابلة للمفاضلة على مجموعة** D إذا كانت f قابلة للمفاضلة عند كل نقطة في D.

إذا كانت f دالة في عدة متغيرات انظر **تفاضل**.

قابل للمقارنة COMPARABLE

● **دوال قابلة للمقارنة:**

نقول عن دالتين g,f إنهما قابلتان للمقارنة إذا كانت قيمهما حقيقية وكان لهما نفس المجال D وإذا كان $f(x) \leq g(x)$ وذلك لكل x في D أو كان $f(x) \geq g(x)$ وذلك لكل x في D.

● **عناصر قابلة للمقارنة:**

نقول عن عنصرين a,b في مجموعة مرتبة جزئياً أنهما قابلان للمقارنة إذا كان aRb أو bRa حيث أن R هي علاقة الترتيب الجزئي على المجموعة إذا كان هناك عنصران a,b بحيث يكون $a \not R b$ و $b \not R a$، فإننا نقول أن a,b **غير قابلين للمقارنة**.

قابل للمكاملة INTEGRABLE

● **معادلة تفاضلية قابلة للمكاملة:**

انظر تفاضل ــ معادلة تفاضلية قابلة للمكاملة.

● **دالة قابلة للمكاملة:**

هي الدالة التي يكون تكاملها موجوداً (وفق أية طريقة تعرف هذا الوجود). وغالباً ما يشترط أيضاً أن يكون التكامل منتهياً. وفي أحيان قليلة يسمح بعض المؤلفين بأن يأخذ التكامل قيم $+\infty$ ، $-\infty$. (أنظر داربو ــ مبرهنة؛ انظر كذلك **تكامل**). ليكن m قياساً على جبرية لمجموعات جزئية من المجموعة T نقول إن الدالة القابلة للقياس s **دالة بسيطة** إذا كان مداها يتكون من مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية. لنفرض أن $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ هي مجموعة العناصر غير الصفرية في مدى الدالة البسيطة، وأن $Q_i = s^{-1}(q_i)$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$ فإن تكامل s على T يساوي:

$$\int_T s\, d m = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot m(Q_i)$$

على افتراض أنه لا يوجد حدان في الطرف الأيمن بحيث يكون أحدهما ∞

والآخر ∞ – (ويشترط أحياناً أن تكون كل حدود الطرف الأيمن منتهية). ويعرف تكامل الدالة f اللاسالبة والقابلة للمكاملة بأنه أصغر حد علوي للتكاملات $\int_T sdm$ حيث s دالة بسيطة تحقق $s(x) \le f(x)$ لكل $x \epsilon T$. ويمكن كتابة أي دالة f قابلة للقياس على الشكل $f = f^+ - f^-$ حيث $f^+ = max(f,0)$، $f^- = max(-f,0)$، وبعبارة أخرى، فإن:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \ge 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & f(x) \le 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

وفي هذه الحالة نقول إن f قابلة للمكاملة إذا كان كل من $\int_T f^+dm$ و $\int_T f^- dm$ موجوداً، وكان أحدهما لا يساوي ∞ + (وأحياناً يتطلب أن لا يكون أي منهما مساوياً ∞ +). ونكتب $\int_T fdm = \int_T f^+dm - \int_T f^-dm$.

انظر **مقياس** ـ مقياس مجموعة.

قاسم **DIVISOR**

القاسم هو الكمية التي يقسم عليها المقسوم.

انظر **قسمة** ـ القسمة الخوارزمية.

- **القاسم المشترك** لكميتين أو أكثر:

هو الكمية التي تكون عاملاً لكل من الكميات المعطاة. فمثلاً القاسم المشترك للكميات 25، 15، 40 هو الرقم 5 أما القاسم المشترك للكميتين $x^2 - y^2$ و $x^2 + 2xy + y^2$ فهو الكمية $x + y$ لأن $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ و $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$. ويسمى القاسم المشترك أحياناً كثيرة **بالعامل المشترك**.

- **القاسم المشترك الأعظم** لكميتين أو أكثر:

هو القاسم المشترك الذي يقبل القسمة على كل القواسم المشتركة الأخرى. وبالنسبة للأعداد الصحيحة يكون القاسم المشترك الأعظم أكبر قاسم

مشترك. فمثلاً القواسم المشتركة للعددين 30 و 42 هي 2 و 3 و 6 وبالتالي فإن 6 باعتباره أكبر قاسم مشترك يكون هو القاسم المشترك الأعظم للعددين 30 و 42.

● **القاسم المعتدل لزمرة:**

انظر **معتدل** ــ زمرة معتدلة.

قاسم بسيط — ELEMENTARY DIVISOR

● **القاسم البسيط لمصفوفة:**

انظر **لا متغير** ــ العامل اللامتغير لمصفوفة.

● **العمليات البسيطة على المعينات أو المصفوفات:**

وهذه العمليات هي:

(1) مبادلة موضعي صفين أو عمودين.

(2) إضافة صف (عمود) إلى صف أو (عمود) آخر بعد ضرب الصف (العمود) بثابت عددي.

(3) ضرب صف أو عمود بثابت غير صفري.

ويجدر بنا أن نلاحظ هنا أن العملية (1) تغير فقط إشارة قيمة المعين ولا تغير قيمته العددية، أما العملية (2) فلا تغير قيمة المعين، وبالنسبة للعملية رقم (3) فهي تكافىء ضرب قيمة المعين بذلك الثابت.

انظر **مكافىء** ــ المصفوفات المتكافئة.

قاسم تام — ALIQUOT PART

هو كل قاسم مضبوط أو كل عامل من عوامل قضية ما، ونستعمل هذا الاصطلاح غالباً في مجموعة الأعداد الصحيحة. فالعدد 2 مثلاً هو قاسم تام للعدد 6.

SECANT — قاطع

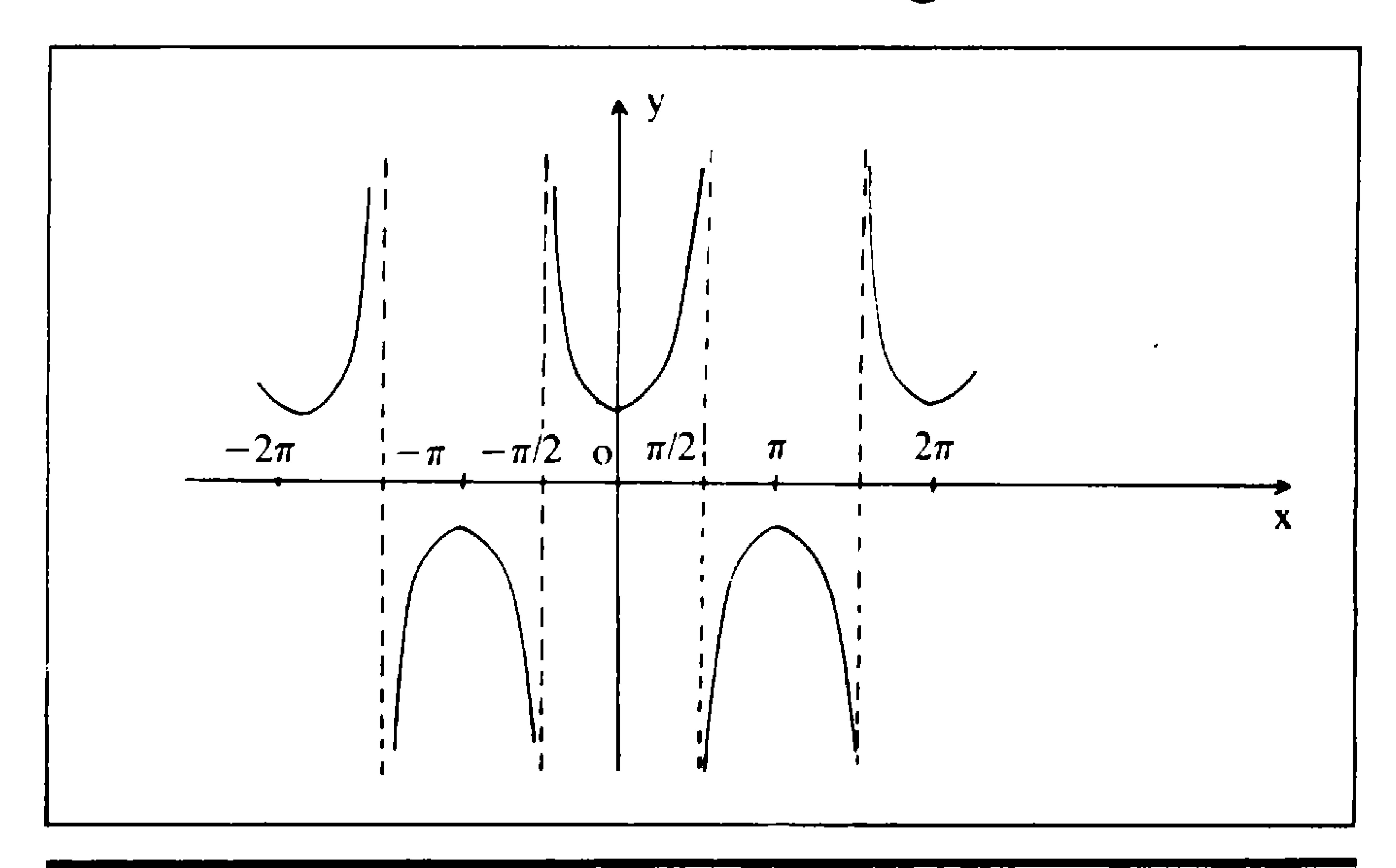
(1) خط مستقيم يقطع منحنياً معلوماً.

(2) إحدى الدوال المثلثية.

انظر مثلثي ــ دوال مثلثية.

● منحنى القاطع:

بيان الدالة $y = \sec x$ حيث sec ترمز لدالة القاطع. ويكون منحنى دالة القاطع مقعراً إلى الأعلى في الفترة $-\pi/2<x<\pi/2$ ومقعراً إلى الأسفل في الفترة $\pi/2<x<3\pi/2$ ويكون مقارباً للمستقيمين $x = \pi/2,\ x = -\pi/2$ وتتكرر هذه الأشكال في كل فترة طولها π حيث يكون المنحنى مقعراً إلى الأعلى مرة وإلى الأسفل مرة أخرى. ويقطع المنحنى محور y في النقطة (0,1).



COSECANT — قاطع تمام

انظر مثلثي ــ دوال مثلثية.

● منحنى قاطع تمام:

هو بيان المعادلة $y = \csc x$ وهو نفس المنحنى الذي نحصل عليه عن

طريق تحريك منحنى القاطع $\pi/2$ راديان إلى اليمين لأن $\csc x = \sec(x - \pi/2)$.
انظر **قاطع** ـ منحنى قاطع .

قاعدة **RULE**

---

(1) عملية أو طريقة موصوفة بتعليمات لاتباع أسلوب معين .
(2) صيغة كلامية أو صيغة رياضية .
انظر **ديكارت** ـ قاعدة ديكارت في الإشارات ؛ انظر **تجريبي** ـ قاعدة تجريبية ؛ انظر **لوبيتال** ـ قاعدة لوبيتال ؛ انظر **ثلاثة** ـ قاعدة الثلاثة .

قاعدة **BASE (of a geometric configuration)**

القاعدة في تشكُّل هندسي هي ضلع (أو وجه) ننشىء عليه عموداً ونعتبر هذا العمود ارتفاع التشكل .

● **زاويتا القاعدة في مثلث:**
هما زاويتان تكون قاعدة المثلث ذراعيهما المشترك .

قاعدة التاجر **MERCHANT'S RULE**

هي قاعدة لحساب الرصيد المستحق على ورقة مالية بعد تسديد دفعات جزئية عليها . وبموجب هذه الطريقة تحسب مقدار كل دفعة جزئية عند تاريخ التصفية ثم نطرح مجموع هذه المقادير من القيمة الإسمية للورقة المالية في ذلك التاريخ .

قانون **LAW**

القانون هو مبدأ عام أو قاعدة عامة .
انظر **تجميعي**، **تبديلي**، **تناقض**، **أس**، **كبلر**، **كبير**، **لوغاريتم**، **نيوتن**، **مثلثي** .

● **متغير عشوائي قانوني**:

لتكن S مجموعة فيها عدد p من المتغيرات العشوائية ولتكن T مجموعة فيها عدد q من المتغيرات العشوائية أيضاً. فإنه يوجد مجموعتان $\{X_1,\ldots,X_p\}$ و $\{Y_1,\ldots,Y_q\}$ من المتغيرات العشوائية وتسمى **متغيرات عشوائية قانونية** بحيث يكون ارتباط أي عنصرين في نفس المجموعة صفراً، كما يكون ارتباط كل X_i مع Y_j صفراً إذا كان $i \neq j$. يكون كل X_i توافقاً خطياً من عناصر S وكل Y_i توافقاً خطياً من عناصر T. يكون الوسط كل X وكل Y_i صفراً والتباين لكل منهما 1. تسمى الارتباطات بين X_i و Y_i **ارتباطات قانونية** ($1 \leq i \leq m$)، حيث m هو الأصغر بين p,q).

● **شكل قانوني لمصفوفة**:

وهو شكل تتخذه المصفوفة المربعة تحت تأثير تحويل معين، بحيث يكون هذا الشكل هو الأبسط والتعامل معه هو الأسهل. وقد يسمى أيضاً **شكلاً طبيعياً**، أمثلة:

(1) يمكن تحويل أي مصفوفة مربعة إلى الشكل القانوني بحيث تقع العناصر التي لا تساوي صفراً على القطر الرئيسي فقط، وذلك بواسطة عدد من العمليات البسيطة أو بواسطة تحويل متكافىء. كما يمكن تحويل أي مصفوفة مربعة (عناصرها أعداد صحيحة أوكثيرات حدود) إلى شكل **سميث القانوني** حيث تقع العناصر التي لا تساوي صفراً على القطر الرئيسي فقط ويكون كل من هذه العناصر عاملاً من عوامل العنصر الذي يليه من أسفل إذا لم يكن هذا العنصر صفراً.

(2) بواسطة تحويل تسامتي، يمكن تحويل أي مصفوفة إلى **شكل جاكوبي القانوني**، حيث يكون كل عنصر تحت القطر الرئيسي صفراً وتكون عناصر هذا القطر هي الجذور المميزة للمصفوفة، كما يمكن تحويل أي مصفوفة إلى **الشكل القانوني التقليدي** الذي يأخذ أصفاراً باستثناء متتالية من مصفوفات جوردان

متواجدة على طول القطر الرئيسي. ونستطيع أن نعرف الشكل القانوني التقليدي بالضبط عن طريق مميز سيفر (وهو مجموعة من الأعداد الصحيحة تمثل مراتب مصفوفات جوردان الجزئية، بحيث نجمع الأعداد المقابلة لمصفوفات جزئية لها نفس الجذور المميزة). عندما تكون الجذور المميزة مختلفة يكون الشكل القانوني التقليدي مصفوفة قطرية.

(3) يمكن تحويل كل مصفوفة متناظرة إلى مصفوفة قطرية وذلك بواسطة تحويل متطابق.

(4) يمكن تحويل أي مصفوفة معتدلة (وبالتالي أي مصفوفة هرميتية إلى مصفوفة قطرية، وذلك بواسطة تحويل وحدي وتكون عناصر القطر في هذه الحالة هي الجذور المميزة).

● التمثيل القانوني لمنحن في الفضاء:

وهو تمثيل للمنحنى في جوار نقطة P_o بحيث يكون الوسيط هو طول القوس ابتداء من هذه النقطة وتكون محاور الاحداثيات هي محاور ثلاثي الوجوه المتحرك المرتبط بالنقطة ويأخذ هذا التمثيل الشكل التالي:

$$x = S - \frac{1}{6}\frac{1}{\rho_o^2} S^3 + \dots$$

$$y = \frac{1}{2P_o} S^3 + \frac{1}{6}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)_o S^3 + \dots$$

$$z = -\frac{1}{6}\frac{1}{\rho_o \tau_o} S^3 + \dots$$

حيث ρ_o هو نصف قطر التقوس عند P_o و τ_o هو الفتل (الالتفاف) عند P_o أيضاً.

قبعة **CAP**

وهي الرمز ∩ المستعمل للدلالة على تقاطع مجموعتين.

انظر تقاطع.

قبل المتراص PRECOMPACT

نقول عن مجموعة جزئية A في فضاء مقاسي X أنها قبل المتراصة إذا كانت غلاقتها في $\hat{X}$ متراصة حيث $\hat{X}$ هو إتمام X. (انظر إتمـام). وتكون المجموعة A قبل المتراصة إذا وفقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد عائلة منتهية $a_1, a_2, \ldots, a_m$ من عناصر X بحيث إذا كان $x \in A$ نستطيع أن نجد a_j في العائلة ويحقق $d(x,a_j) < \epsilon$ حيث d هو انعكاس على x. وبمعنى آخر نقول إن A قبل المتراصة إذاً وفقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$ نستطيع تغطية A بعدد منته من الكرات $S_\epsilon(a_1), \ldots, S_\epsilon(a_m)$ التي نصف قطرها ϵ.

قبول ACCEPTANCE

• منطقة القبول:

انظر فرض ــ اختبار الفرض.

قد GAUGE

لتكن Y مجموعة ما. نسمي الدالـة $d: Y \times Y \to R$ قداً إذا تحققت الشروط التالية:

(1) $d(x,y) \geq 0$ لكل y,x في Y.

(2) إذا كان $x = y$ فإن $d(x,y) = 0$.

(3) $d(y,x) = d(x,y)$ لكل y,x في Y.

(4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ لكل $x,y,z \in Y$.

ويسمى القد أحياناً بـ **شبه المقاس**. والتسمية الأخيرة للقد أكثر انتشاراً ومرد هذا إلى أن هذه الشروط تعرف مقاساً إذا أضيف إليها الشرط التالي:

(2)* إذا كان $d(x,y) = 0$ فإن $x = y$. (انظر **مقاس**).

ومن هنا يتضح أن كل مقاس يكون قداً ولكن العكس غير صحيح، كما

سيتضح من المثال التالي: ليكن $d:R \times R \to R$ (R مجموعة الأعداد الحقيقية) معرفاً بالقانون $d(x,y) = |x^2 - y^2|$. يتضح لنا على الفور أن d تحقق خواص القد ولكنها ليست مقاساً لأنها لا تحقق (2)*. فمثلاً $d(-2,2) = 0$ وبشكل عام $d(-x,x) = 0$ لكل $x \in R$.

قــد

ليكن E فضاء متجهات و A مجموعة جزئية فيه، فنعرف قد A أو دالي مينكوفسكي g_A للمجموعة A بأنه التطبيق $x \to g_A(x)$ من E إلى المجموعة الممـدة للأعـداد الحقيقيـة المـوجبـة $R_+ U\{\infty\}$ والمعـرف كـما يـلي: $g_A(x) = \inf\{\rho|\rho > 0, x \in \rho A\}$ إذا كان هناك ρ بحيث يكون $x \in \rho A$ (أنظر صخور). أما إذا كان $x \notin \rho A$ وذلك لكل $\rho > 0$ فإن $g_A(x) = +\infty$. ولكل $\lambda > 0$ فـإن $g_A(\lambda x) = \lambda g_A(x)$، وذلك لأن الشـرطـين $x \in \rho A$ و $\lambda x \in \lambda\rho A$ متكافئان. وإذا كانت A مجموعة ماصة فلا بد أن يكون قد A منتهياً. وإذا كان 0 عنصراً في A فإن $g_A(0) = 0$ أما إذا كانت A مجموعة محدبة فإن قدها g_A يحقق المتباينة $g_A(x + y) \le g_A(x) + g_A(y)$ وإذا كانت A مجموعة ماصة، متوازنة ومحدبة فإن قدها يكون مثيل المعيار.

انظر مثيل المعيار.

قدرة **POTENCY**

● **قدرة مجموعة:**

انظر رئيس ــ عدد رئيس.

قدم **FOOT**

---

(1) و القدم وحدة قياس خطي تساوي 12 بوصة.

(2) والقدم تعبير يستخدم للدلالة على نقطة تقاطع خط مع خط آخر أو مستوى. وعلى وجه الأخص فإن قدم العمودي على خط هو نقطة تقاطع

الخط مع العمودي عليه. أما قدم العمودي على مستوى فيكون نقطة تقاطع العمودي (على المستوى) مع المستوى.

● **قدم ـ باوند:**

هي **وحدة الشغل**، أي الشغل المبذول لرفع جسم وزنه باوند واحد مسافة قدرها قدم واحدة.

انظر **قوة حصان**.

QUANTILE **قِدّة**

ليكن X متغيراً عشوائياً ويتبع التوزيع الاحتمالي F. تسمى القيمة $X = \xi_p$ قدّة من p للتوزيع F إذا كان $Pr(X < \xi_p) \le p \le Pr(X \le \xi_p)$ لأجل $0 < p < 1$ إذا كان التوزيع الاحتمالي F مستمراً ومتزايداً قطعاً، فإن القدة من p تكون وحيدة ويمكن تعريفها بأنها القيمة $X = \xi_p$ بحيث $Pr(X \le \xi_p) = p$ وتجمع كلمة قدّة إلى قِدَد. مرادف: مئين.

PROJECTILE **قذيفة**

● **مسار قذيفة:**

انظر **قطع مكافىء**.

CUSP **قرنة**

القرنة هي نقطة مضاعفة ينطبق عندها مماساً المنحنى ويقال لها أيضاً نقطة ناب.

● **قرنة من النوع الأول أو قرنة بسيطة:**

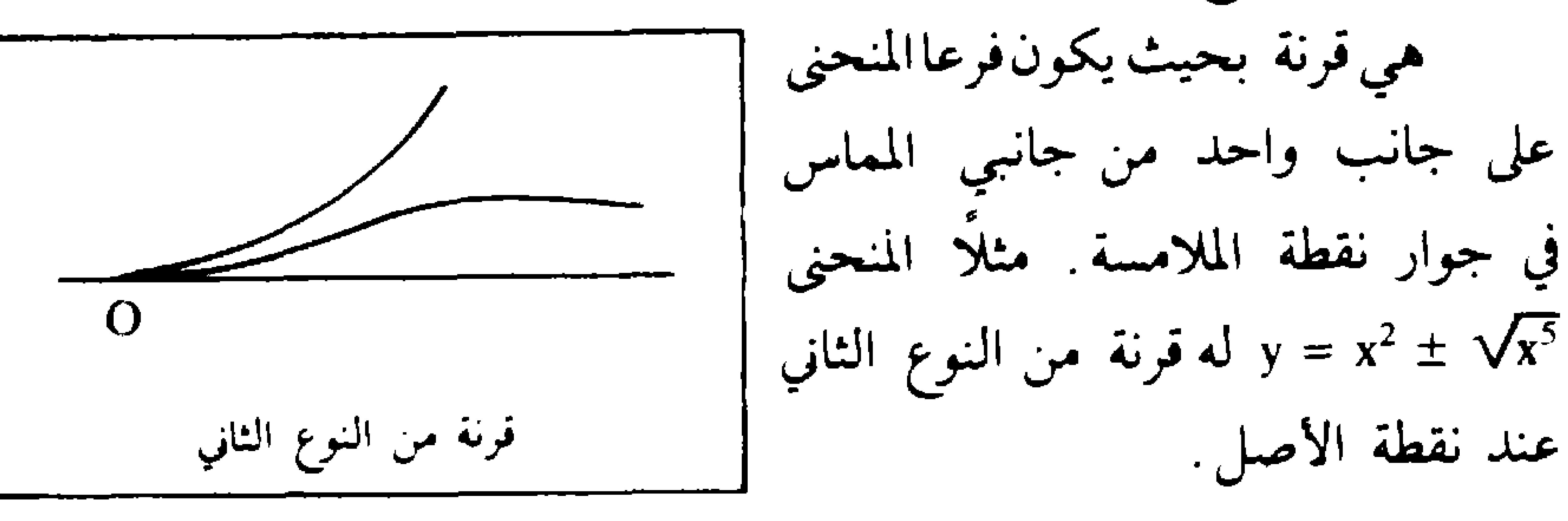
هي قرنة بحيث يكون هناك فرع من فروع المنحنى على كل جانب من جانبي المماس في جوار نقطة التماس.

مثلاً القطع المكافىء مثيل التكعيبي $y^2 = x^3$ له قرنة عند نقطة الأصل.

O

● قرنة من النوع الثاني:

هي قرنة بحيث يكون فرعا المنحنى على جانب واحد من جانبي المماس في جوار نقطة الملامسة. مثلاً المنحنى $y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$ له قرنة من النوع الثاني عند نقطة الأصل.



قرنة من النوع الثاني

● قرنة مضاعفة:

وتعني نقطة ملاصقة. (انظر ملاصقة). إذا كان لدينا عائلة منحنيات فإن المحل الهندسي للقرن هو مجموعة من النقاط تكون كل منها قرنة لواحد من أعضاء العائلة.

انظر مميز ـ مميز معادلة تفاضلية.

● دويري داخلي من أربع قرنات:

انظر دويري داخلي.

قرين ADJOINT

● قرين معادلة تفاضلية:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية المتجانسة من المرتبة n

$$L(y) = p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

عندئذ نعرف قرين هذه المعادلة بالشكل:

$$\bar{L}(y) = (-1)^n \frac{d^n(p_0 y)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_1 y)}{dx^{n-1}} + \dots - \frac{d(p_{n-1} y)}{dx} + p_n y = 0$$

ونرى بسهولة أن $\overline{[\bar{L}(y)]} = L(y)$ ويكون $y(x)$ حلاً لإحدى المعادلتين إذا وفقط إذا كان هذا الحل عامل تكميل للأخرى. كما يمكن أن نرى أنه يوجد عبارة $p(u,v)$ بحيث $v\,L(u) - u\,\bar{L}(v) \equiv \frac{dP(u,v)}{dx}$ حيث $P(u,v)$ هي عبارة

خطية متجانسة في u و v ومشتقاتها حتى المرتبة $n - 1$. وتعرف هذه العبارة (أي $P(u,v)$) باسم **الملازمة ثنائية الخطية**.

● **معادلة تفاضلية مقترنة ذاتياً:**

هي المعادلة $L(y) = 0$ التي تحقق الشرط $L(y) \equiv \bar{L}(y)$.

مثال: المعادلة $p_0y'' + p_1y' + p_2y = 0$ تكون مقترنة ذاتياً إذا كان $p_0' = p_1$.

● **قرين مصفوفة (A):**

(1) المصفوفة القرينة هي منقول المصفوفة الناتجة عن A بعد إبدال كل عنصر من عناصر A بمتعامل هذا العنصر. ويتم تعريف المصفوفة القرينة فقط من أجل المصفوفات المربعة. ويسمي بعض المؤلفين المصفوفة B المرافقة الهرميتية لمصفوفة أخرى A بالمصفوفة القرينة.

● **قرين تحويل T (مؤثر T):**

عندما يكون لدينا تحويل خطي محدود T يطبّق فضاء هيلبرت H في H (حيث مجال T يساوي H) فإنه يوجد تحويل وحيد خطي محدود T نسميه قرين التحويل T بحيث يكون $< Tx,y > = < x,T^*y >$ من أجل جميع x و y المنتمية إلى H (هنا $<,>$ هو الجداء الداخلي). وينتج من هذا أن $\|T\| = \|T^*\|$. ونقول بأن التحويلين T_1,T_2 قرينان إذا كان $< T_1x,y > = < x,T_2y >$ من أجل كل x في مجال T_1 وكل y في مجال T_2.

إذا كان T تحويلاً خطياً مجاله كثيف في H، فإنه يوجد تحويل وحيد T^* (يسمى قرين T) بحيث أن T و T^* قرينان، فإذا كان S هو أي تحويل آخر قرين لـ T فإن مجال T يكون محتوى في مجال T^* كما أن S و T^* يتطابقان في مجال S. فإذا كان لدينا فضاء عدد أبعاده منتهياً وكان T تحويلاً يطبق المتجه $x = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ على $Tx = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ وفق العلاقة $y_i = \sum\limits_j a_{ij}x_j$ (من أجل أي i) فإن قرين T في هذه الحالة هو التحويل T^* الذي يحقق $T^*x = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ ويعطى بالعلاقة $y_i = \sum\limits_j \bar{a}_{ji}x_i$ أما المصفوفتان الموافقتان للتحويلين T و T^* فتكونان مترافقتين هرميتياً بالتبادل. إذا كان T تحويلاً خطياً محدوداً يطبق فضاء بناخ X في فضاء بناخ Y وكان X^* الفضاء

المرافق الأول للفضاء X و Y^* الفضاء المرافق الأول للفضاء Y، فإن قرين T هو التحويل الخطي T^* الذي يطبق Y^* في X^* بحيث $T^*(g) = f$ (من أجل $f \in X^*$ و $g \in Y^*$) إذا كان f هو دالياً خطياً معرفاً بالعلاقة $f(x) = g[T(x)]$ إذا كان T_1 و T_2 تحويلين خطيين محدودين فإن قريني $T_1 + T_2$ و $T_1.T_2$ هما $T_1^* + T_2^*$ و $T_2^*.T_1^*$ على الترتيب. إذا كان معاكس التحويل T موجوداً هو T^{-1} وكان مجال T^{-1} هو كل H (أو Y) فإن $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. إن قرين T^* في فضاءات بناخ هو التحويل T^{**} الذي يطبق X^{**} في Y^{**} والذي يعتبر امتداداً محافظاً على المعيار للتحويل T (أي أن T تطبق مجموعة جزئية من X^{**} متقايسة مع X في Y^{**}). أما T^{**} في فضاء هيلبرت فيتطابق مع T إذا كان T محدوداً ومجاله H، وفيما عدا ذلك فإن T^{**} هو امتداد خطي لـ T.

انظر تحويل مترافق ذاتياً.

● **فضاء قرين:**

انظر مرافق ــ فضاء مرافق.

قسري — FORCED

● **الاهتزازات والتذبذبات القسرية:** انظر تذبذب.

قسمة — DIVISION

بالقسمة نعني الشيئين التاليين:

(1) إيجاد خارج القسمة والباقي في القسمة الخوارزمية (انظر أسفل).

(2) كما نعني بالقسمة **العملية المعاكسة للضرب**. ونسمي نتيجة قسمة عدد (المقسوم) على عدد آخر (المقسوم عليه) **بخارج القسمة**.

ويعرف خارج القسمة $\frac{a}{b}$ للعددين a و b بأنه ذلك العدد c حيث $b.c = a$ على فرض أن c **موجود ووحيد**. فإذا كان $b = 0$ و $a \neq 0$ فإن $\frac{a}{b}$ غير معرف أي أن c غير موجود. أما إذا كان $b = 0$ و $a = 0$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{0}{0}$ غير

وحيد أي أن c غير وحيد. وفي كلتا الحالتين فإن $\frac{a}{b}$ غير معرف. كما يمكن تعريف خارج القسمة $\frac{a}{b}$ بأنه حاصل ضرب a **ومعكوس** العدد b (انظر **زمرة**).

مـثـلاً $2 = \frac{6}{3}$ لأن $3 . 2 = 6$ وكـذلـك $(3+i)/(2-i) = 1+i$ لأن $3+i = (2-i)(1+i)$ حيث $i = -1$.

● **قسمة كسر على عدد صحيح:**

مثال: $\frac{3/7}{4} = \frac{3}{7} \div 4 = \frac{3}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{28}$

● **قسمة كسر على كسر:**

مثال: $\frac{3/5}{4/7} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{20}$

انظر **كسر ــ كسر عقدي**.

● **قسمة الأعداد المركبة:**

عند قسمة عددين مركبين فإننا أولاً نحولهما إلى كسرين ثم نقسمهما كما هو موضح آنفاً.

مثال: $1\frac{1}{5} \div 2\frac{3}{4} = \frac{6}{5} \div \frac{11}{4} = \frac{6}{5} \times \frac{4}{11} = \frac{24}{55}$

● **جبر القسمة:**

انظر **جبر ــ الجبر على حقل**.

● **القسمة الخوارزمية:**

(1) تنص القسمة الخوارزمية للأعداد الصحيحة على أنه لكل عدد صحيح m وعدد صحيح موجب n يوجد عددان صحيحان ووحيدان q و r بحيث $m = nq + r, 0 \leq r < n$.

نلاحظ أن m هو **المقسوم** و n **القاسم** و q **خارج القسمة** و r **الباقي**.

(2) أما في حالة كثيرات الحدود فتنص القسمة الخوارزمية على أن لكل

كثير حدود f وكثير حدود غير ثابت g يوجد كثيرا حدود ووحيدان هما q و r بحيث $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ وبحيث تكون $r = 0$ أو أن تكون درجة r أقل من درجة g. وتسمى كثيرات الحدود f و g و q و r **بالمقسوم والقاسم وخارج القسمة والباقي** على الترتيب.

● **القسمة على عدد عشري:**

وعند القسمة على عدد عشري نضرب كلاً من المقسوم والقاسم بقوة للعدد عشرة بحيث يصبح القاسم عدداً صحيحاً ثم نجري عملية القسمة كما هي الحال في الأعداد الصحيحة وقبل استخدام أي رقم في المقسوم بعد النقطة العشرية نضع نقطة عشرية على يمين خارج القسمة الذي حصلنا عليه حتى الآن ثم نكمل القسمة بعد ذلك.

مثال: $47.352 \div 15.72 = 4735.2 \div 1572 = 3.0122137$

● **القسمة على مقياس:**

نقول إن العددين الصحيحين m و n متكافئان أو متساويان مقياس p. إذا كان الفرق بينهما $(n - m)$ هو أحد مضاعفات العدد p ويعبر عن ذلك بالرمز $n = m(\text{mod } p)$ فمثلاً العددان 7 و 3 متساويا مقاس 2 أي $7 = 3 \text{ mod } 2$.

لنفرض أن $f(x) = q(x).d(x) + r(x)$ وأن معاملات $f(x)$ أعداد صحيحة، ولنفرض $g(x)$ كثير حدود آخر معاملاته أعداد صحيحة ومساوية مقياس p لمعاملات f بالترتيب فإننا نقول ان

$$g(x) = q(x).d(x) + r(x) \ (\text{mod } p)$$

مثال:

$$f(x) = x^2 - 5x + 7 = (x-3)(x-2) + 1$$

$$g(x) = 5s^2 - 9x - 1 = (x-3)(x-2) + 1 \ (\text{mod } 4)$$

● **القسمة بالتناسب:**

إذا كان $a/b = c/d$ فإن $\frac{c-d}{d} = \frac{a-b}{b}$ وهذا يسمى قسمة بالتناسب.

● **حلقة قسمة:**

انظر حلقة.

● **تحويل القسمة:**

تسمى العلاقة «المقسوم = خارج القسمة × القاسم + الباقي» بتحويل القسمة واستخدام هذا التعبير نادر.

● **القسمة باستخدام اللوغاريتمات:** انظر **لوغاريتم**.

● **القسمة التوافقية للخط:** انظر **توافقي**.

● **نقطة التقسيم:** انظر **نقطة ـ** نقطة التقسيم.

● **نسبة التقسيم:** انظر **نقطة ـ** نقطة التقسيم.

● **القسمة القصيرة والقسمة الطويلة:**

تسمى القسمة بالقصيرة إذا كان بالامكان إجراؤها ذهنياً وبدون استخدام ورقة وقلم وتسمى بالطويلة خلاف ذلك. وفي الجبر تسمى القسمة قصيرة إذا احتوى القاسم على حد واحد وتسمى طويلة إذا احتوى القاسم على أكثر من حد.

● **القسمة التركيبية:** انظر **تركيبي**.

قص SHEARING

● **قوة القص:**

واحدة من قوتين ليستا على استقامة واحدة تؤثران على جسم باتجاهين متضادين وتسبب هاتان القوتان تحريفا في الجسم يسمى **جهد القص**.

● **حركة القص:**

الحركة الناتجة في الجسم من تأثير إجهاد القص.

● **جهد القص:** انظر **جهد**.

● **إجهاد القص:** انظر **إجهاد**.

● **مقياس القص:**

نفس مقياس الصلابة. انظر **صلابة**.

● **تحويل القص البسيط:** انظر **تحويل**.

قصير SHORT

● **قوس الدائرة القصير:**

القوس الأقصر الناتج من قطع محيط الدائرة بوتر ما.

● **قسمة قصيرة:** انظر قسمة.

● **فترة الثقة الأقصر:** انظر ثقة.

قضيب BAR

انظر تكديس.

قضية PROPOSITION

وهي مسألة أو مبرهنة أو عبارة وهي إما أن تكون صحيحة أو خاطئة. وإما أن يكون قد تم برهانها أو ما زالت قيد الدرس.

قضية STATEMENT

● **دالة قضايا:**

نفس دالة افتراضية.

● **قضية مفتوحة:**

دالة يتألف مداها من مجموعة من القضايا.

مرادف: **دالة افتراضية:** انظر افتراضي.

قطاع (إحصاء) BLOCK

مجموعة من العناصر التي تتصف بصفات متجانسة وتعامل كوحدة واحدة. مثل مجموعة أماكن الخزن تتصف بترتيب معين في وحدة تخزين الحاسب.

● **قطاع بيانات:**

بيانات تقسم إلى مجموعات تسمى كل مجموعة قطاعاً.

● **مخطط قطاعي:**

مخطط يوضح الخطوات والمراحل العامة لتنفيذ عمليات مشروع معين.

● **قطاعات عشوائية (إحصاء):**

مجموعات نقسّم إليها وحدات المعاينة المتوفرة في تجربة معينة بحيث تكون وحدات المجموعة الواحدة متجانسة قدر الامكان بالنسبة للعوامل المؤثرة في المعالجات قيد الدراسة في تلك التجربة. إن التصميم التجريبي الذي نقوم فيه نستخدم فيه القطاعات العشوائية بحيث ننسب المعالجات إلى وحدات كل قطاع بصورة عشوائية يسمى **تصميم القطاعات العشوائية**. فالهدف من استخدام القطاعات العشوائية هو تصغير الخطأ التجريبي (الخطأ العشوائي) في التجربة وذلك بعزل الاختلاف بين القطاعات العشوائية عن الخطأ التجريبي. فمثلاً عند مقارنة أربعة أنواع (T_1,T_2,T_3,T_4) من الذرة نقسم الأرض المخصصة للتجربة إلى قطاعات كل قطاع يتكون من أربع وحدات متجانسة من ناحية الخصوبة. ثم ننسّب، بصورة عشوائية، المعالجات (T_1,T_2,T_3,T_4) إلى الوحدات الأربع من كل قطاع. وهذا يحقق كون الفروق بين المعالجات يعود إلى نوع الذرة بالدرجة الأولى وليس إلى اختلاف في خصوبة الأرض. وإذا استوعب القطاع الواحد في التصميم جميع المعالجات قيد الدراسة، نسمي هذا التصميم **تصميم القطاعات العشوائية التامة**. أما إذا لم يستوعب القطاع جميع المعالجات (لكثرتها مثلاً) فنسمي ذلك التصميم **تصميم القطاعات العشوائية غير التامة**.

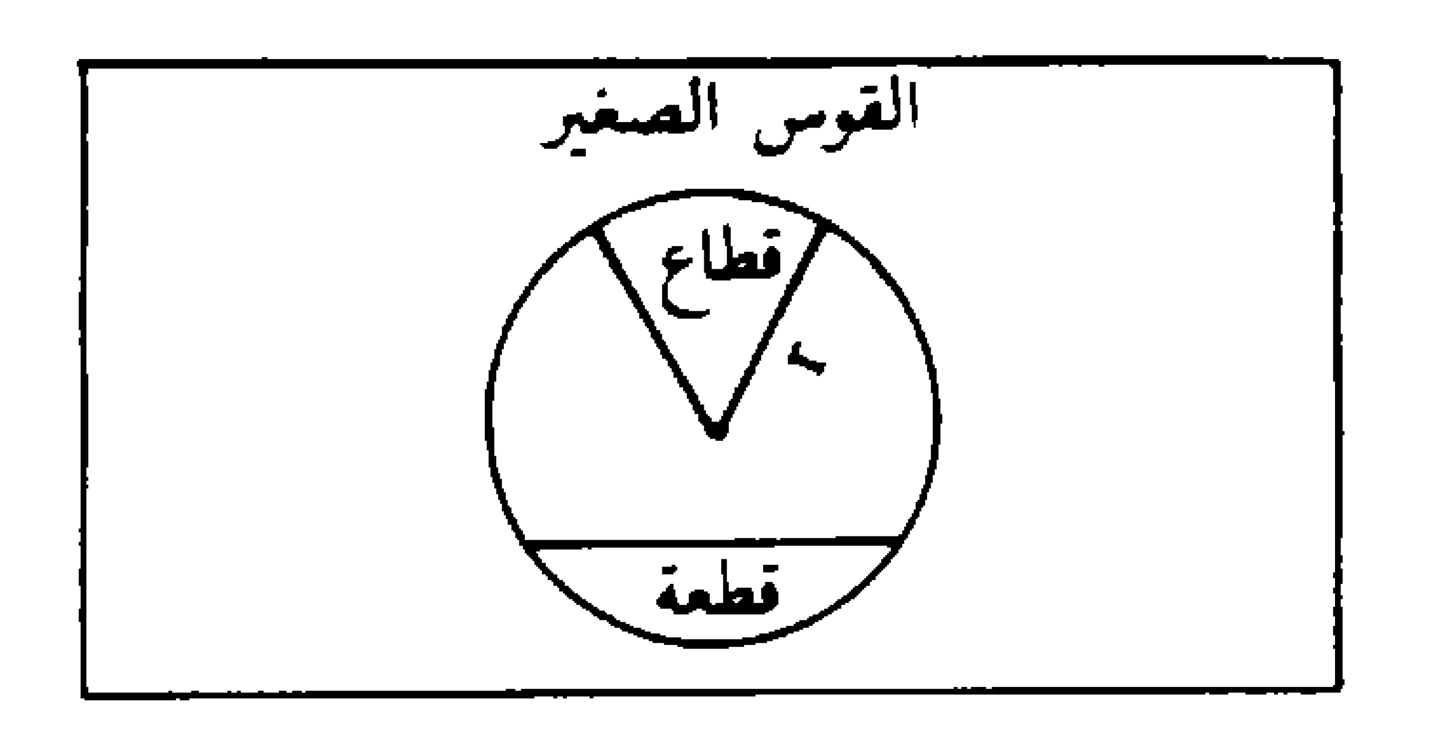
انظر **تصميم**.

قطاع — SECTOR

● **قطاع دائرة:**

جزء من الدائرة محصور بين نصفي قطرين وأحد قوسي الدائرة المعينين بنصفي القطرين. ويسمى القوس القصير **بالقوس الصغير** والقوس الطويل

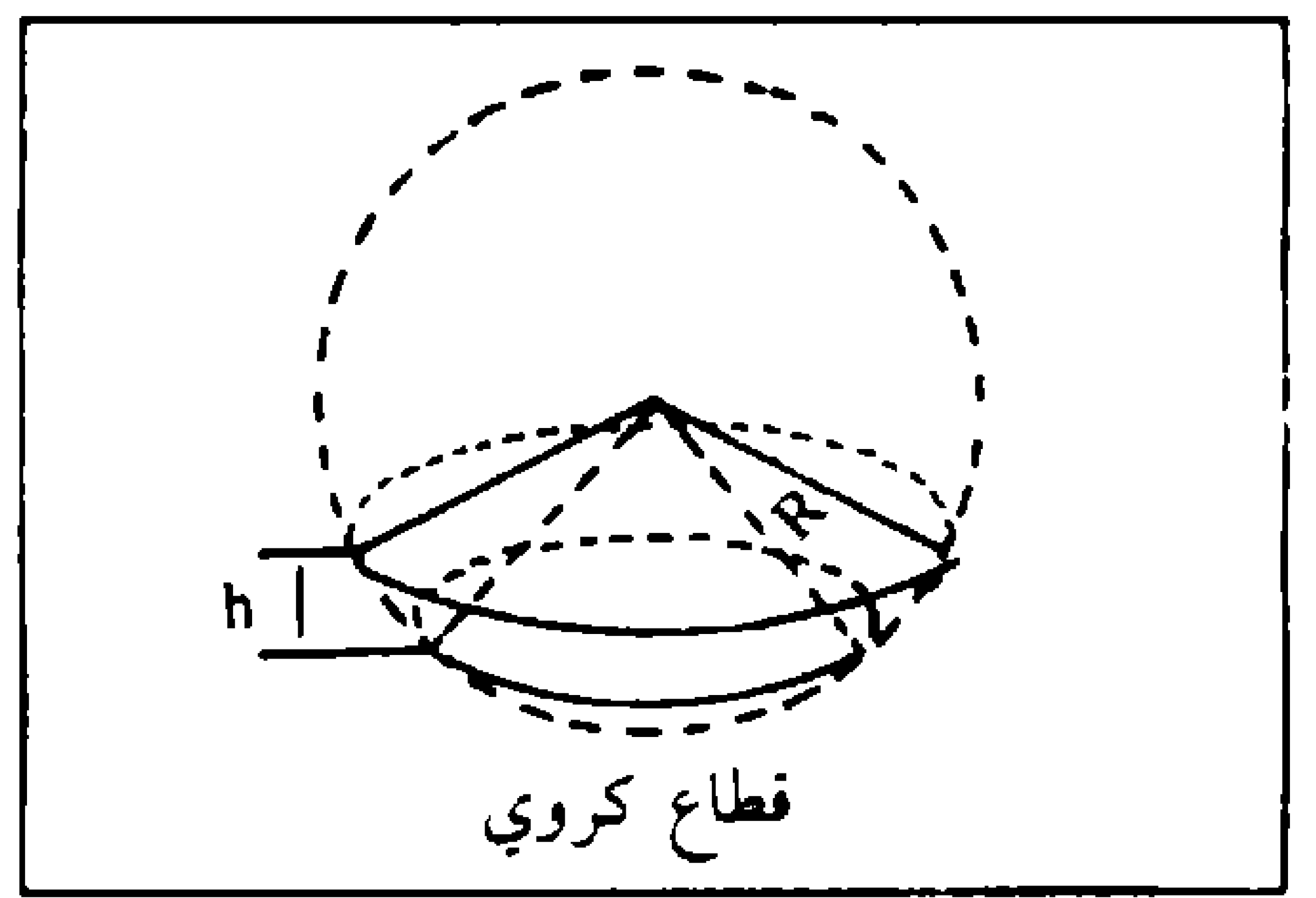
بالقوس الكبير. ومساحة القطاع هي $\frac{1}{2} r^2 \phi$ حيث r هو نصف القطر و ϕ هي الزاوية المركزية (بقياس راديان) المقابلة لقوس القطاع.



● **قطاع كروي:**

مجسم ينشأ عن دوران قطاع الدائرة حول قطر معين. ويرى في الشكل قطاع دائرة وما ينتج من دورانه حول القطر (المستقيم المنقط) حيث ينتج القطاع الكروي المبين في الشكل. ويساوي حجم القطاع الكروي $\frac{2}{3}\pi R^2 h$ حيث R هو نصف قطر الكرة و h هو ارتفاع **النطاق** الناتج.

انظر نطاق.



قطب **POLE**

● **قطب دالة تحليلية:**

انظر منفرد ــ نقطة منفردة منعزلة لدالة تحليلية.

● **قطب الكرة السماوية:**

هو إحدى نقطتي اختراق محور الأرض (عند مده) للكرة السماوية، وتسمى النقطتان بالقطبين السماويين **الشمالي والجنوبي**.

● **قطب الدائرة على الكرة:**

هو نقطة تقاطع الكرة مع الخط المار بمركز الدائرة وعمودي على مستوى الدائرة. فمثلاً أقطاب خط الاستواء هما القطبان الشمالي والجنوبي.

وتعرف أقطاب **قوس من دائرة** على الكرة بأنها أقطاب الدائرة المحتوية على هذا القوس.

- **قطب وقطبي القطع المخروطي:**

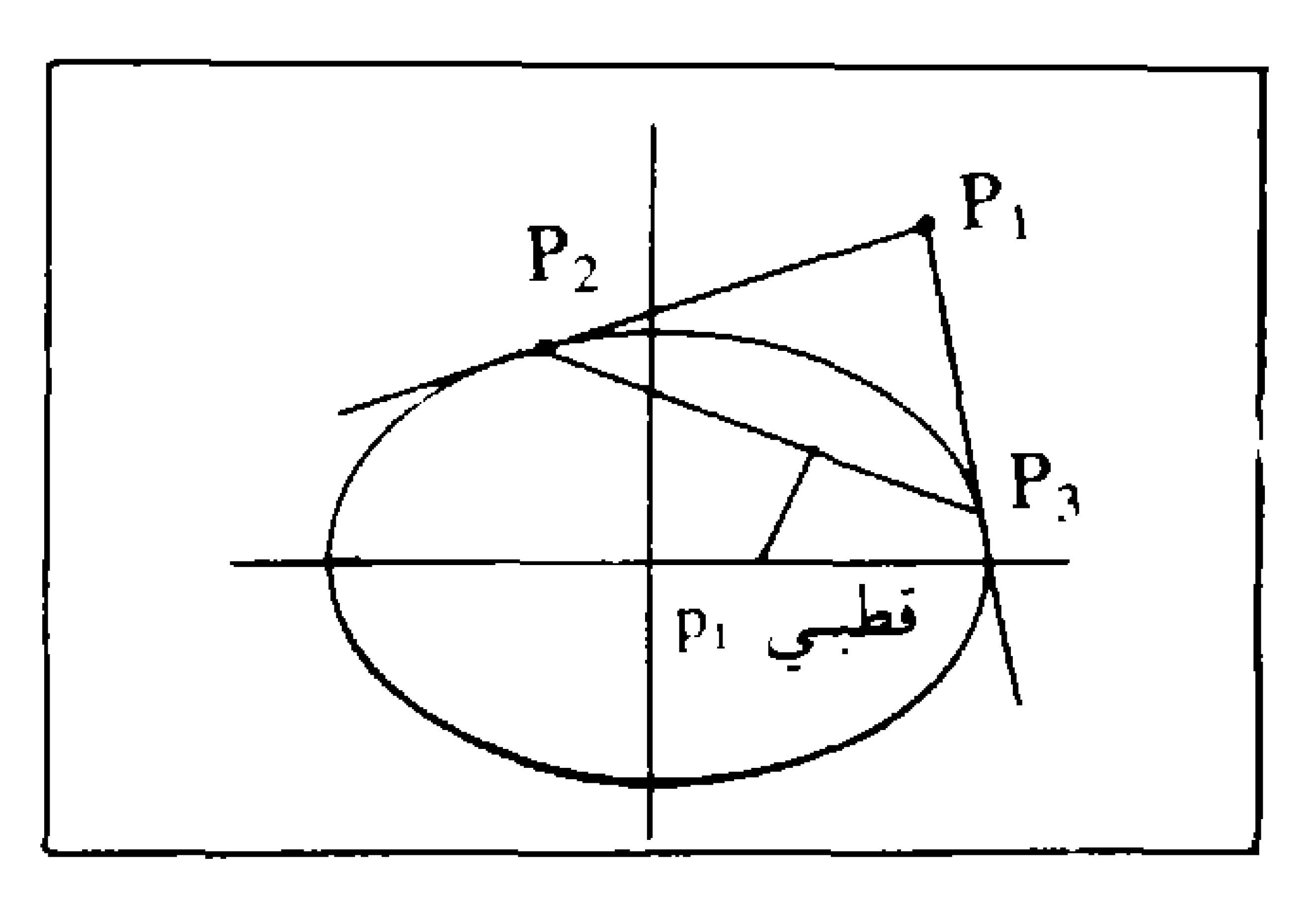
هما النقطة p والمستقيم L حيث L هو المحل الهندسي للمرافقات التوافقية للنقطة p بالنسبة للنقطتين التي يقطع عندهما القطع المخروطي بواسطة قاطع يمر بالنقطة p.

وبعبارة أخرى فإنهما النقطة p والمستقيم L والذي هو المحل الهندسي للنقاط المرافقة للنقطة p. ويكون المستقيم L **قطبي النقطة** p وتكون النقطة p **قطب المستقيم** L.

وتحليلياً فإن قطبي النقطة هو المحل الهندسي للمعادلة الناتجة بعد استبدال إحداثيي نقطة التماس في معادلة المماس العام للمخروط بإحداثيي النقطة المعطاة.

مثال: معادلة قطبي النقطة (x_1,y_1) بالنسبة للدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ هي $x_1x + y_1y = a^2$.

وإذا كان موقع النقطة p_1 يسمح برسم مماسين للمخروط مارين بها فإن قطبي النقطة p_1 هو القاطع الذي يصل نقطتي التماس p_2 و p_3 كما في الشكل حيث المخروط هو القطع الناقص.



- **قطب وقطبي السطح ثنائي الدرجة:**

هما نقطة p (تسمى قطب المستوى) ومستوى A (يسمى قطبي النقطة) يكون المحل الهندسي للمرافقات التوافقية للنقطة p بالنسبة للنقطتين التي يقطع عندهما القاطع المتغير والمار بالقطب p السطح ثنائي الدرجة. ويمكن الحصول على معادلة القطبي A تحليلياً وذلك باستبدال إحداثيي نقطة التماس في معادلة مستوى المماس العامة (للسطح ثنائي الدرجة) بإحداثيي النقطة p.

مثال: لنفرض أن ثنائي الدرجة هو مجسم قطع ناقص والذي معادلته هي: $\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

فإن معادلة قطبـي النقطة (x_1,y_1,z_1) هو المستوى $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}=1$

- **قطب الاسقاط المجسادي:**

انظر إسقاط.

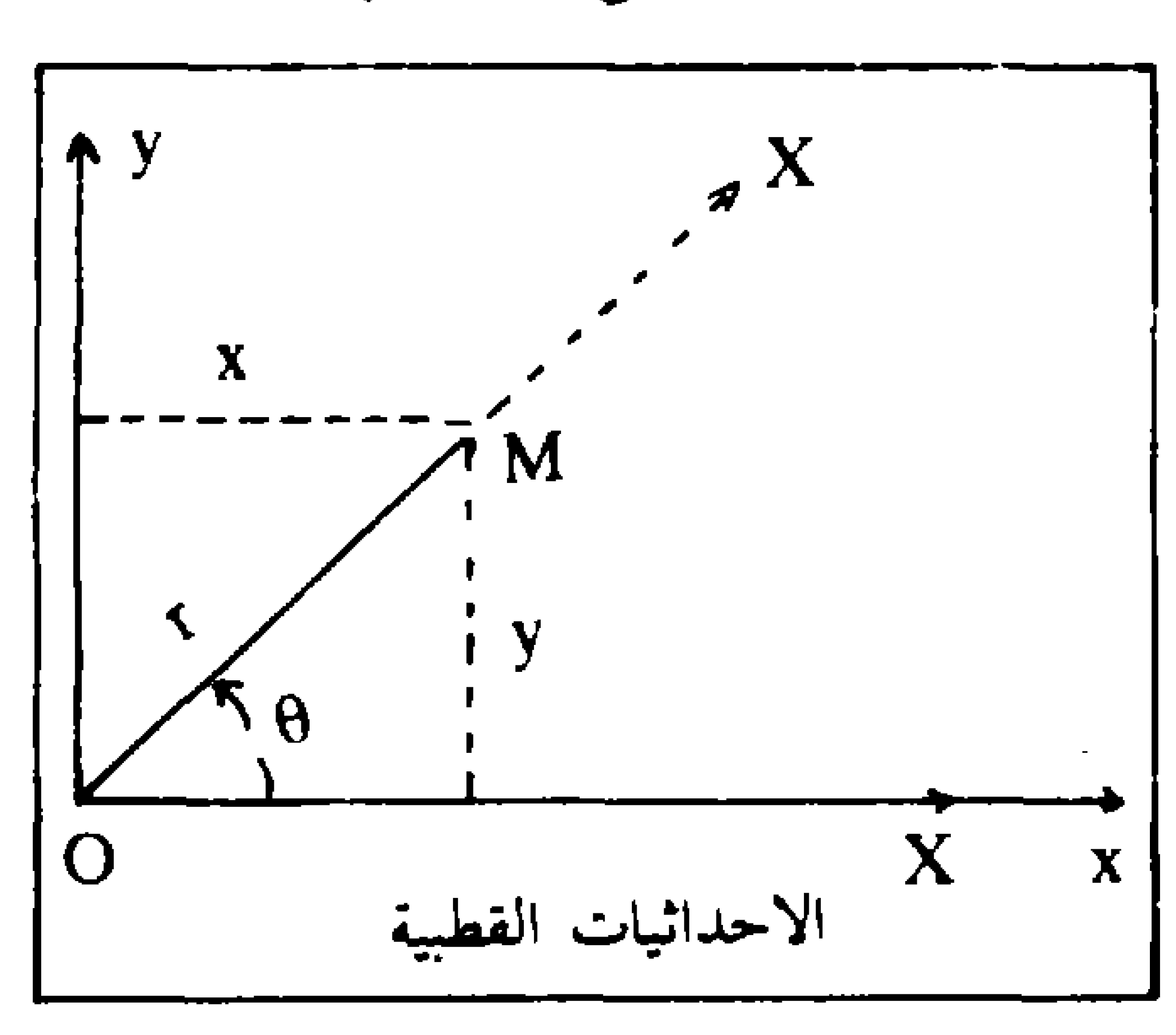
- **قطب نظام إحداثيات:**

انظر قطبـي ـــ إحداثيات قطبين في المستوى.

قطبـي POLAR

- **إحداثيات قطبية في المستوى:**

هو نظام إحداثي يتم فيه تعيين نقطة M في المستوى بواسطة زوج من الأعداد أحدهما r وهو بعد M عن نقطة ثابتة 0 نسميها القطب والآخر θ وهي الزاوية بين OM ومستقيم ثابت OX نسميه **المحور القطبـي** وتكون الزاوية θ موجبة إذا تم دوران OX لينطبق على OM باتجاه معاكس لعقارب الساعة.



الاحداثيات القطبية

ونسمي OM **نصف القطر المتجهي** للنقطة M. أما الزاوية θ فتسمى **الزاوية القطبية** للنقطة M وتسمى θ أحياناً **الزاوية المتجهية** أو السعة أو الخاصة أو السمت للنقطة M وهكذا نكتب اختصاراً $M(r,\theta)$.

كما نكتب في الاحداثيات الديكارتية $M(x,y)$.

أما العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية (x,y) والقطبية (r,θ) فتحسب بسهولة من الشكل ونحصل على

$$x = r\cos\theta\ ,\qquad y = r\sin\theta \qquad (*)$$

$$r = x^2 + y^2\ ,\qquad \theta\ \text{arctg}\ \frac{y}{x} \qquad (**)$$

حيث يتم تحديد وقع وإشارة θ في العلاقة الأخيرة من إشارتي x,y وفق ما يلي:

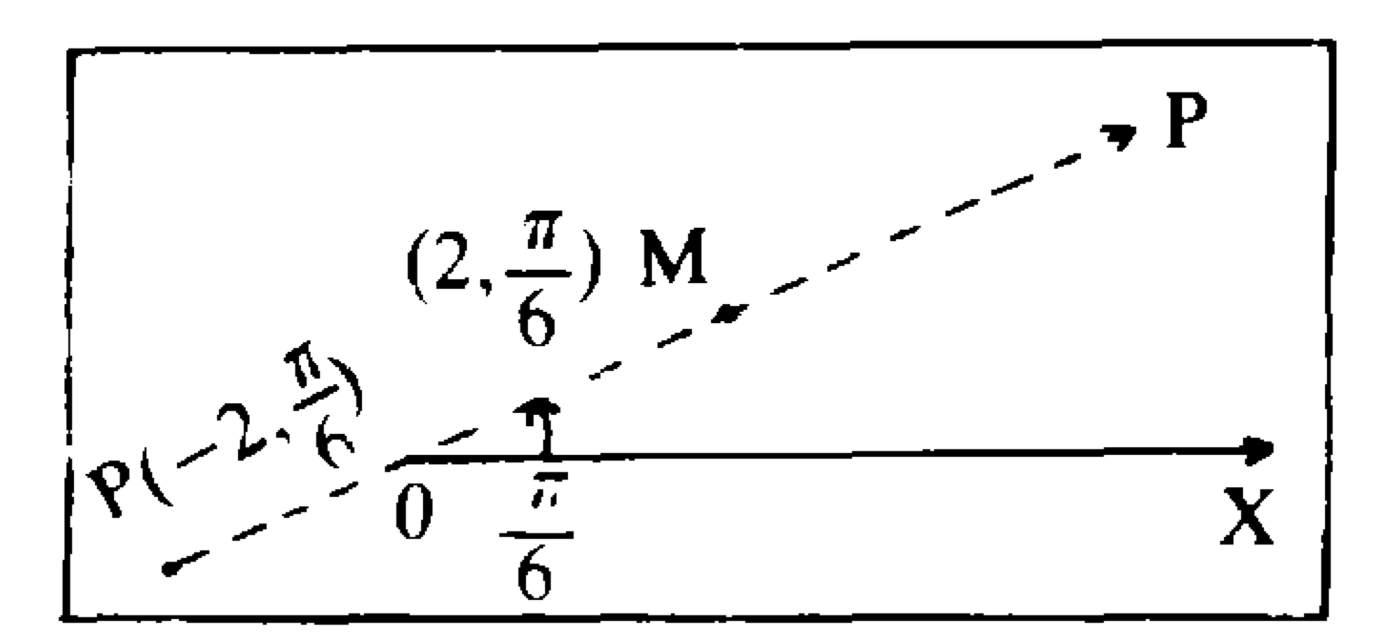
(1) $x > 0, y < 0$ عندئذ θ في الربع الأول.
(2) $x > 0, y < 0$ عندئذ θ في الربع الثاني.
(3) $x < 0, y > 0$ عندئذ θ في الربع الثالث.

مثال (1): إذا كانت الاحداثيات القطبية لنقطة هي $(2,-\frac{\pi}{6})$ فإن الاحداثيات الديكارتية لهذه النقطة تؤخذ من العلاقتين (*) ونجد

$$y = 2 \sin -\frac{\pi}{6} = 1 \text{ , } x = 2 \cos (-\frac{\pi}{6}) = 3$$

مثال (2): إذا كانت الاحداثيات الديكارتية لنقطة هي $(-1,1)$ فإن الاحداثيات القطبية تؤخذ من العلاقتين (*) مع تحديد إشارة وموقع θ من (3) وهكذا نجد $\theta = 135^0, r = 2$.

ملاحظة (1): ليس بالضرورة أن تكون r في الاحداثيات القطبية موجبة بل من الممكن أن تكون سالبة وعندئذ نأخذ الطول في r في الاتجاه السالب للمحور الذي تحدده الزاوية θ. يوضح الشكل النقطتين $M(2,\frac{\pi}{6})$ و $P(-2,\frac{\pi}{2})$.



ملاحظة (2): الفرق الأساسي بين نظام الاحداثيات الديكارتية ونظام الاحداثيات القطبية هو أن الاحداثيات الديكارتية لنقطة تتعين بشكل وحيد بينما الأمر ليس كذلك في الاحداثيات القطبية.

فالاحداثيات الديكارتية للنقطة M هي $(3,1)$ بينما يمكن أن تعطى M قطبياً بأحد الأزواج التالية:

$$(-2,-\frac{5\pi}{6}), (2,\frac{\pi}{6}+2\pi), (-2,\pi+\frac{\pi}{6}), (-2,3\pi+\frac{\pi}{6}), \dots$$

- **إحداثيات قطبية في الفضاء:**

هي نفس الاحداثيات الكروية. انظر كروي.

● **مسافة قطبية**:

هي معادلة في الاحداثيات القطبية مثل $r = a$ (حيث a مقدار ثابت) والتي تمثل معادلة الدائرة.

انظر **مخروطي**؛ انظر **مستقيم**، **شكل قطبـي**.

● **شكل قطبـي لعدد عقدي**:

نعلم أن العدد العقدي z يكتب بالشكل $z = x + iy$ فإذا انتقلنا من الزوج (x,y) الممثل للعدد العقدي z إلى الزوج (r,θ) وفق العلاقتين (*) لأمكن كتابة z بالشكل

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

الذي نسميه الشكل القطبـي للعدد العقدي. وتسمى r عادة **القيمة المطلقة للعدد العقدي** بينما تسمى θ **الطور** أو **العمدة** أو **السعة** للعدد العقدي z.

ويسمى الشكل القطبـي أحياناً **الشكل المثلثي**.

انظر **عقدي** ــ عدد عقدي؛ انظر **دوموافر** ــ مبرهنة دوموافر؛ انظر **أويلر** ــ صيغة أويلر.

● **مستقيم قطبـي، مستوى قطبـي**:

انظر **قطب**.

● **مستقيم قطبـي لمنحن فضائي**:

هو مستقيم عمودي على المستوى الملاصق لمنحن فضائي ومار من مركز التقوس للمنحنى.

● **مستقيم قطبـي لشكل تربيعي**:

هو الشكل الثنائي الخطية

$$Q' = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i x_j$$

الذي نحصل عليه من تطبيق المؤثر $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

على الشكل التربيعي $Q = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$

فإذا اعتبرنا x و y أنهما نقطتان في فضاء ذي (n − 1) بعداً وافترضنا أن $(x_1,\ldots,x_n)$ و $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ هي **الإحداثيات المتجانسة** للنقطتين x و y فـإن $Q = 0$ هي معادلة ثنائي الدرجة كما أن $Q' = 0$ هي معادلة المستقيم القطبـي لـ y بالنسبة لثنائي الدرجة.

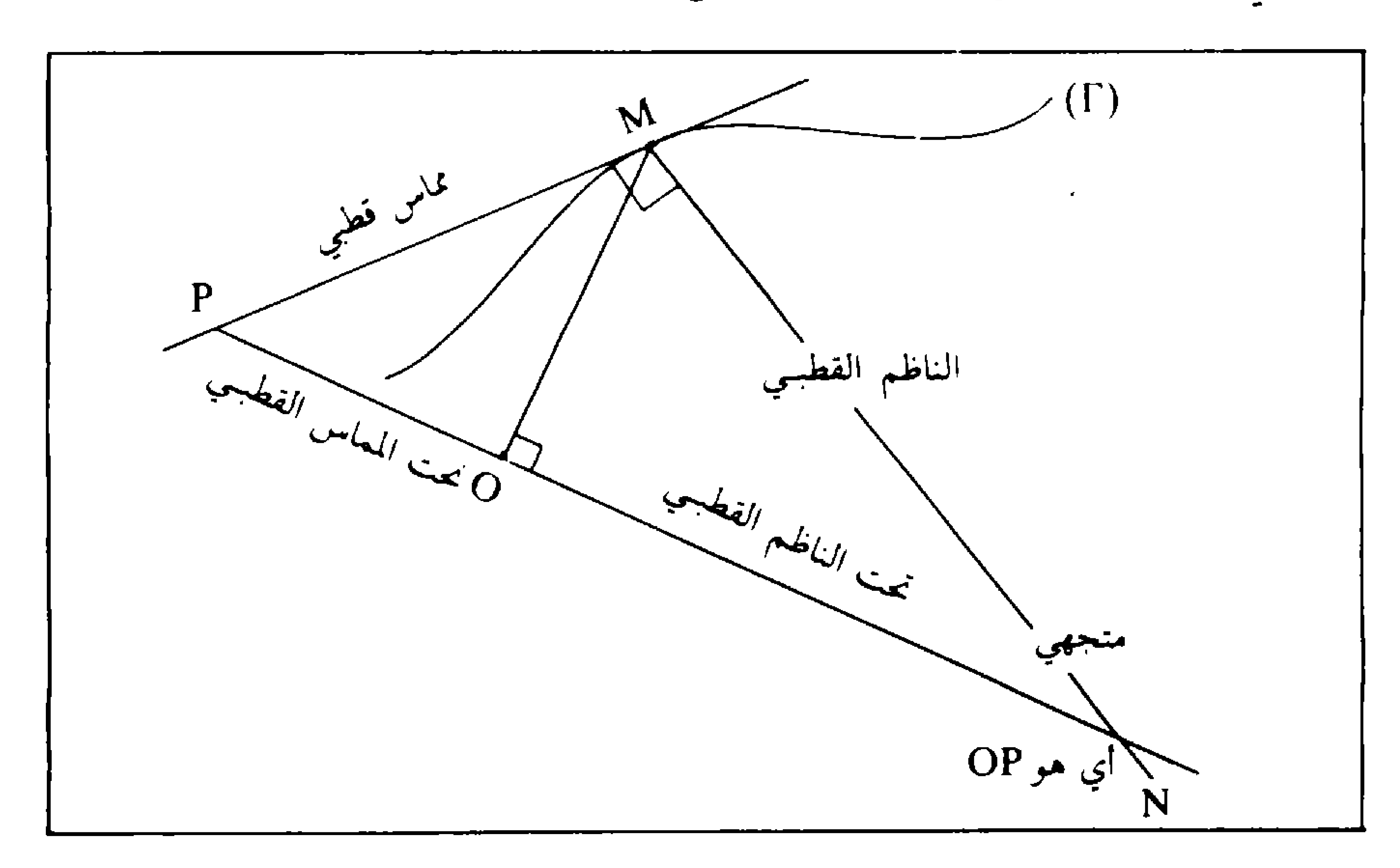
انظر **قطب ـ مستقيم قطبـي لقطع مخروطي**.

- **منحنيات قطبية عكسية:**

انظر **عكسي**.

- **مماس قطبـي:**

هوالجزء PM من المستقيم المماس للمنحنى (Γ) والمحصور بين نقطة التماس M ونقطة تقاطع المستقيم المار بالقطب والعمودي على نصف القطر المتجهي لنقطة التماس M. انظر الشكل.



- **تحت المماس القطبـي:**

هو مسقط المماس القطبـي على المستقيم العمودي على نصف القطر المتجهي للنقطة M في O، أي هو OP.

• **ناظم قطبي**:

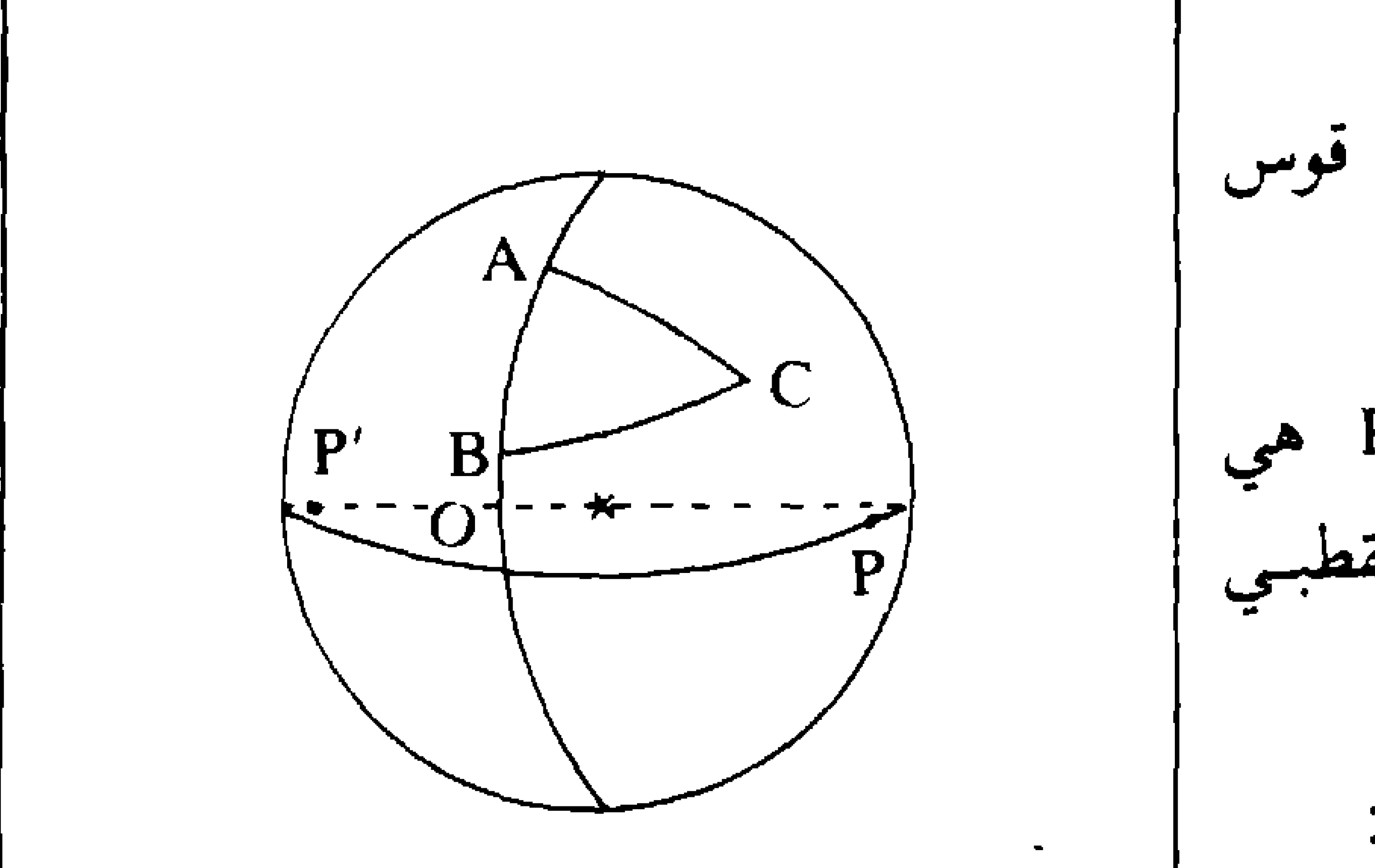
هوالجزء من الناظم على المنحنى المحصور بين M ونقطة تقاطع الناظم مع العمود على نصف القطر المتجهي OM والمار من O أي MN.

• **تحت الناظم القطبي**:

هو الجزء ON.

• **مثلث قطبي لمثلث كروي**:

هوالمثلث الكروي الذي رؤوسه هي **أقطاب** أضلاع المثلث الكروي المعطى. على أن نأخذ قطع الضلع AB على أنه القطب الأقرب إلى الرأس المقابل لذلك الضلع.



انظر قطب ـ قطب قوس في دائرة على كرة.

ويبين الشكل أن P هي أحد رؤوس المثلث القطبي للمثلث الكروي ABC.

• **أشكال قطبية متعاكسة**:

انظر عكسي.

• **قطبية**:

إذا أخذنا المحل الهندسي لكل النقاط في المستوى الاسقاطي والتي ترافق نقطة ثابتة بالنسبة إلى مخروطي معين لوجدنا أن هذا المجال الهندسي هو خط ويسمى **بالخط القطبي** للنقطة الثابتة بالنسبة إلى المخروطي. كما تسمى هذه النقطة **بقطب** الخط بالنسبة إلى المخروطي. وتسمى العلاقة التي تنتج بين النقاط والخطوط كما هو أعلاه **بالقطبية**.

DIAMETER قطر

● **الأقطار المرافقة:**

انظر مرافق.

● **قطر سطح مركزي ثنائي الدرجة:**

هو المحل الهندسي لمراكز المقاطع المتوازية للسطح. وهذا المحل الهندسي هو خط مستقيم.

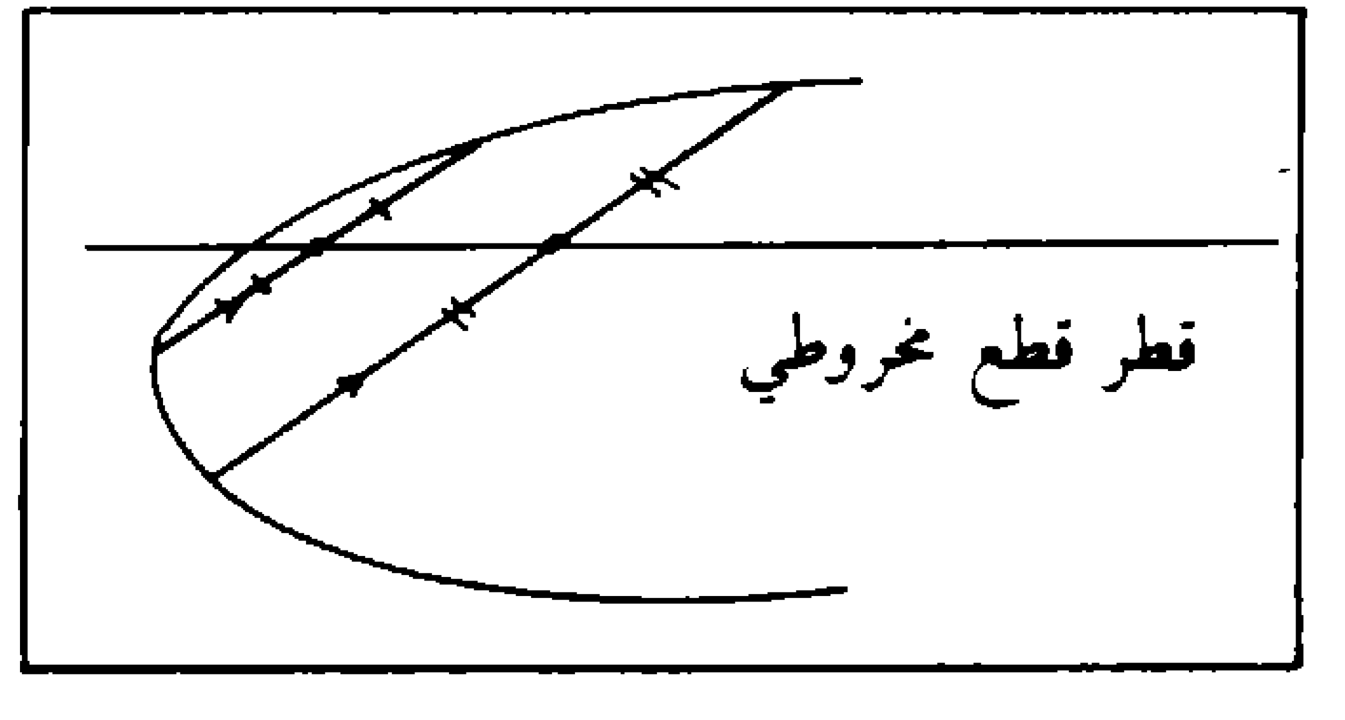
● **قطر الدائرة:**

انظر دائرة.

● **قطر قطع مخروطي:**

هو المحل الهندسي لمنتصفات عائلة من الأوتار المتوازية للقطع المخروطي وبالتالي فإن لأي قطع مخروطي عدد منته من الأقطار. وفي حالة القطوع المخروطية المركزية والقطوع الناقصة والزائدة فإن هذه الأقطار تشكل حزمة من المستقيمات التي تمر بمركز القطع المخروطي.

انظر مرافق ـ الأقطار المترافقة.



● **قطر مجموعة من النقاط:**

انظر محدود ـ مجموعة محدودة من النقاط.

DIAGONAL قطر

● **قطر المعين:** انظر معين.

● **قطر المصفوفة:** انظر مصفوفة.

● **قطر المضلع:**

هو خط يصل بين رأسين غير متجاورين وفي الهندسة الابتدائية يعرف القطر بأنه القطعة المستقيمة بين رأسين غير متجاورين.

أمـا في الهندسـة الإسقاطية فهو الخط المستقيم المار برأسين غير متجاورين والممتد بلا نهاية في الطرفين.

● **قطر كثير الوجوه:**

هو القطعة المستقيمة بين أي رأسين لا يقعان على نفس الوجه.

انظر متوازي السطوح.

DIAMETRAL **قطري**

● **المستوى القطري لسطح ثنائي الدرجة:**

هو المستوى الذي يحوي منتصفات مجموعـة من الأوتار المتـوازية في السطح. ويسمى المستويان القطريان مترافقين إذا كان كل منهما يوازي مجموعة الأوتار المعرفة للآخر.

● **الخط القطري:**

لقطع مخروطي (قطع مكافيء أو ناقص أو زائد) هو نفسه قطر القطع المخروطي.

انظر قطر.

ANTISYMMETRIC **قطري التناظر، تخالفي**

● **متجه ثناوي قطري التناظر:**

انظر متجه ثناوي.

● **علاقة قطرية التناظر:**

نقول ان R هي علاقة قطرية التناظر للمجموعة A إذا تحقق الشرط: إذا كان aRb و bRa فإن a = b حيث a,b هما أي عنصرين في A. مثلاً: العلاقة "≤" في مجموعة الأعداد الطبيعية N هي علاقة قطرية التناظر لأن:

$$a \leq b, b \leq a \Leftarrow a = b$$

ويعني الشرط السابق الذي يعرف العلاقة قطرية التناظر بأن التناظر إن وجد فإنه يوجد على القطر فقط.

قطع CUT

قطع مجموعة T هو مجموعة جزئية C بحيث يكون T − C غير متصل.

إذا كان القطع نقطة فإننا نسميها **نقطة قطع**. وإذا كان خطاً نقول **خط قطع**. إذا لم تكن النقطة نقطة قطع فإنها تسمى **نقطة لا قطع**.

- **قطع ديدكند**:

انظر ديدكند.

قطعاً STRICTLY

- **فضاء محدب قطعاً**: انظر محدب.
- **متزايد قطعاً ومتناقص قطعاً**: انظر متزايد ومتناقص.

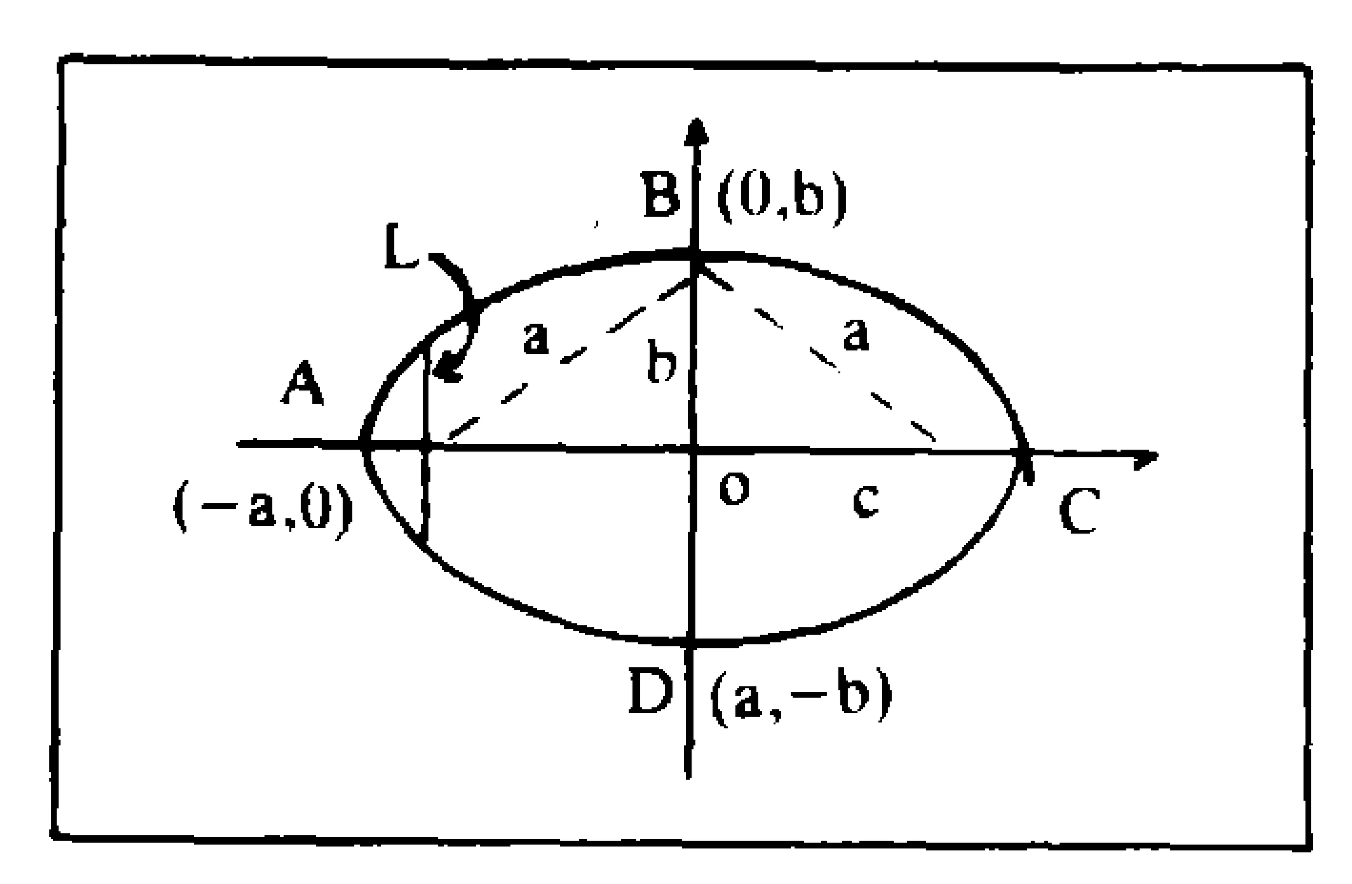
قطع ناقص ELLIPSE

ينتج القطع الناقص من تقاطع سطح مخروطي دائري مع مستوى مائل على محور السطح بحيث نحصل على منحن واحد مغلق. ويمكن تعريف القطع الناقص على أنه مجموعة النقاط التي مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (يسمى كل منهما البؤرة) يساوي مقداراً ثابتاً. ويعرف كذلك بأنه مخروطي اختلافه المركزي أقل من الواحد الصحيح. ويكون القطع الناقص متناظراً بالنسبة لخطين (يكونا متعامدين) L_1 و L_2 ونسمي قطعتي المستقيم الناشئتين من تقاطع القطع الناقص مع L_1 و L_2 بمحوري القطع حيث نسمي أطولهما بالكبير والآخر بالصغير.

وإذا وقع محورا القطع على محوري x و y فإن مركز القطع (هو نقطة تقاطع المحورين) يقع على نقطة الأصل. وتكون معادلة القطع الناقص في هذه الحالة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حيث a و b طولا نصفي المحورين الصغير والكبير. وهذه هي **المعادلة القياسية** للقطع الناقص في الوضع الموضح بالشكل.



والمسافة بين نهاية المحور الصغير وإحدى البؤرتين تساوي a وإذا كانت c هي المسافة بين المركز والبؤرة فإن النسبة $\frac{c}{a}$ تسمى **الاختلاف المركزي** للقطع الناقص.

انظر **مخروطي**.

ومن الشكل يتضح أن c<a وبالتالي فإن الاختلاف المركزي يكون أقل من الواحد. ونقول ان القطعين الناقصين متشابهان إذا كان لهما نفس الاختلاف المركزي. وتسمى النقاط A و B و C و D برؤوس القطع الناقص، ويسمى الوتر L المار بالبؤرة والعمودي على المحور الكبير بالوتر البؤري العمودي. وإذا كان مركز القطع الناقص يقع على النقطة (h,k) فإن معادلته تكون:

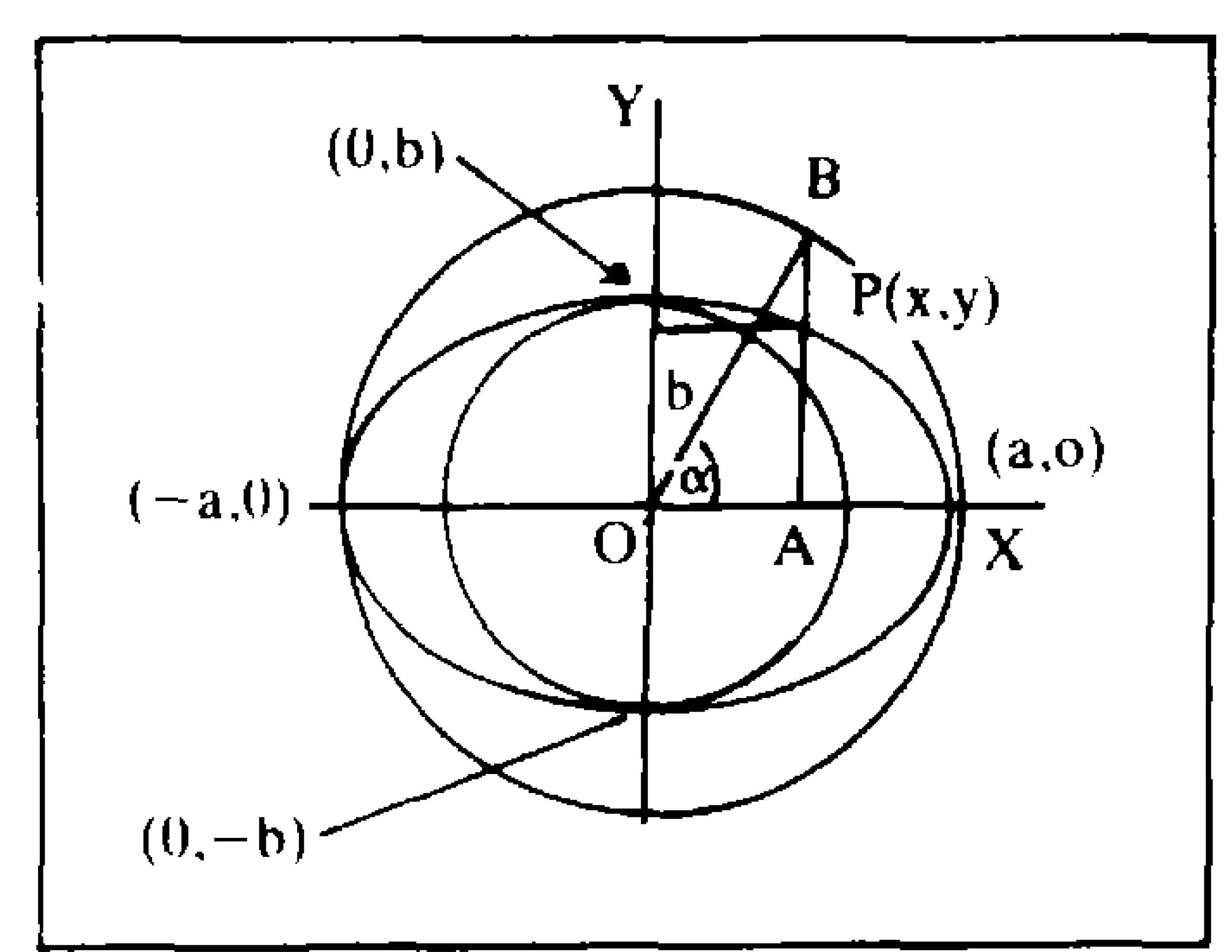
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

وهناك حالتان خاصتان للقطع الناقص لا بد من التعرض إليهما لاستكمال حديثنا عن القطع الناقص. والحالة الأولى عندما تكون معادلته مثل $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=0$ وهذه المعادلة تمثل نقطة واحدة هي (h,k). أما الحالة الثانية فتكون المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=-1$ وهذه تمثل معادلة **قطع ناقص تخيلي** لأنه لا توجد نقطة حقيقية واحدة تحققها

● **قطر القطع الناقص:**

هو المحل الهندسي لنقطة المنصف لمجموعة من الأوتار المتوازية. والجدير بالذكر هنا أن القطر لا بد أن يمر بنقطة المركز وهو دائمًا ينتمي إلى مجموعة من

الأوتار المتوازية والتي تعرف قطراً آخر. ويسمى القطران المعنيان **بقطرين مترافقين**.



● **المعادلات الوسيطية للقطع الناقص**:
يمكن كتابة معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمعادلات الوسيطية $x = a \cos t,\ y = b \sin t$.

حيث t هي الزاوية (عند نقطة الأصل) في المثلث القائم الزاوية والذي يكون ضلعاه فصل النقطة P(x,y) المسمى بـ OA والضلع AB المار بالنقطة P على دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a. وتسمى الزاوية t **بزاوية الاختلاف المركزي** للقطع الناقص. أما الدائرتان في الشكل فتسميان **بدائرتي الاختلاف المركزي**. ويمكن النظر للدائرة على أنها قطع ناقص تطابقت بؤرتاه ووقعتا على نقطة الأصل واختلافه المركزي e مساو للصفر.

انظر **مخروطي** ــ مميز المعادلة من الدرجة الثانية في متغيرين.

قطعة — SEGMENT

الجزء الذي يقتطعه خط مستقيم أو مستوى أو عدة مستويات من شكل ما. وتستعمل عادة للدلالة على جزء محدود من مستقيم أو قوس لمنحن ما.

● **جمع قطع مستقيمة**:
انظر **جمع**.

● **قطعة المنحنى**:
(1) هي جزء من منحن محصور بين نقطتين على المنحنى.
(2) المنطقة المحصورة بين وتر وقوس المنحنى المقابل لذلك الوتر.

● **قطعة الدائرة:**

هي المنطقة المحصورة بين وتر ما في دائرة والقوس المقابل له. وكل وتر يحد قطعتين مختلفتي المساحة إلا إذا كان هذا الوتر قطراً للدائرة. وتسمى القطعة الأصغر مساحة **بالقطعة الصغرى**، والقطعة الأكبر مساحة **بالقطعة الكبرى**. ومساحة قطعة الدائرة تساوي $\frac{1}{2}r^2(\beta - \sin\beta)$ حيث r نصف قطر الدائرة و β هي الزاوية المركزية (بالقياس الدائري) التي يقابلها قوس قطعة الدائرة.

انظر الشكل تحت مقطع.

● **قطعة مستقيمة:**

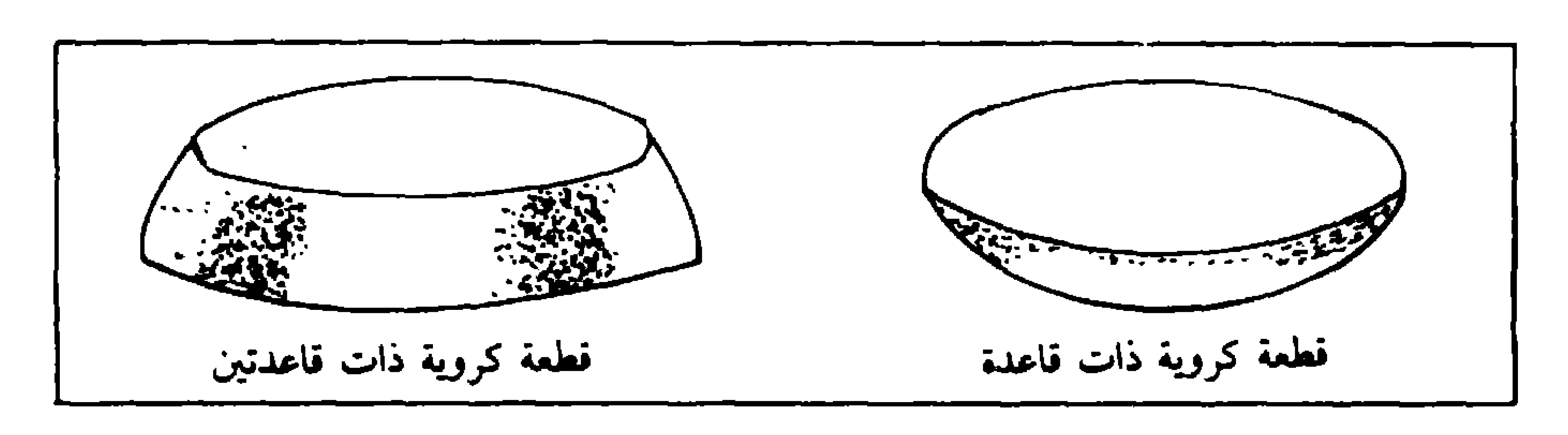
جزء من الخط المستقيم محصور بين نقطتين على المستقيم. وقد تحتوي القطعة المستقيمة على نقطة نهاية طرفها أو كلتي نقطتي نهايتها. وإذا تطابقت نقطتا نهاية القطعة المستقيمة فنسمي القطعة **قطعة متلاشية**.

● **قطعة كروية:**

المجسم المحدود بكرة وبمستويين متوازيين يقطعان أو يمسان الكرة. إذا كان أحد المستويين مماساً للكرة فنسمي القطعة **قطعة كروية ذات قاعدة واحدة**. وإذا قطع كلا المستويين الكرة فنسمي القطعة **قطعة كروية ذات قاعدتين** (انظر الشكل). أما ارتفاع القطعة الكروية فهو المسافة العمودية بين المستويين اللذين يقطعان الكرة. كما أن حجم القطعة الكروية ذات القاعدتين يعطى بالعلاقة:

$$\frac{1}{6}\pi h\,(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$$

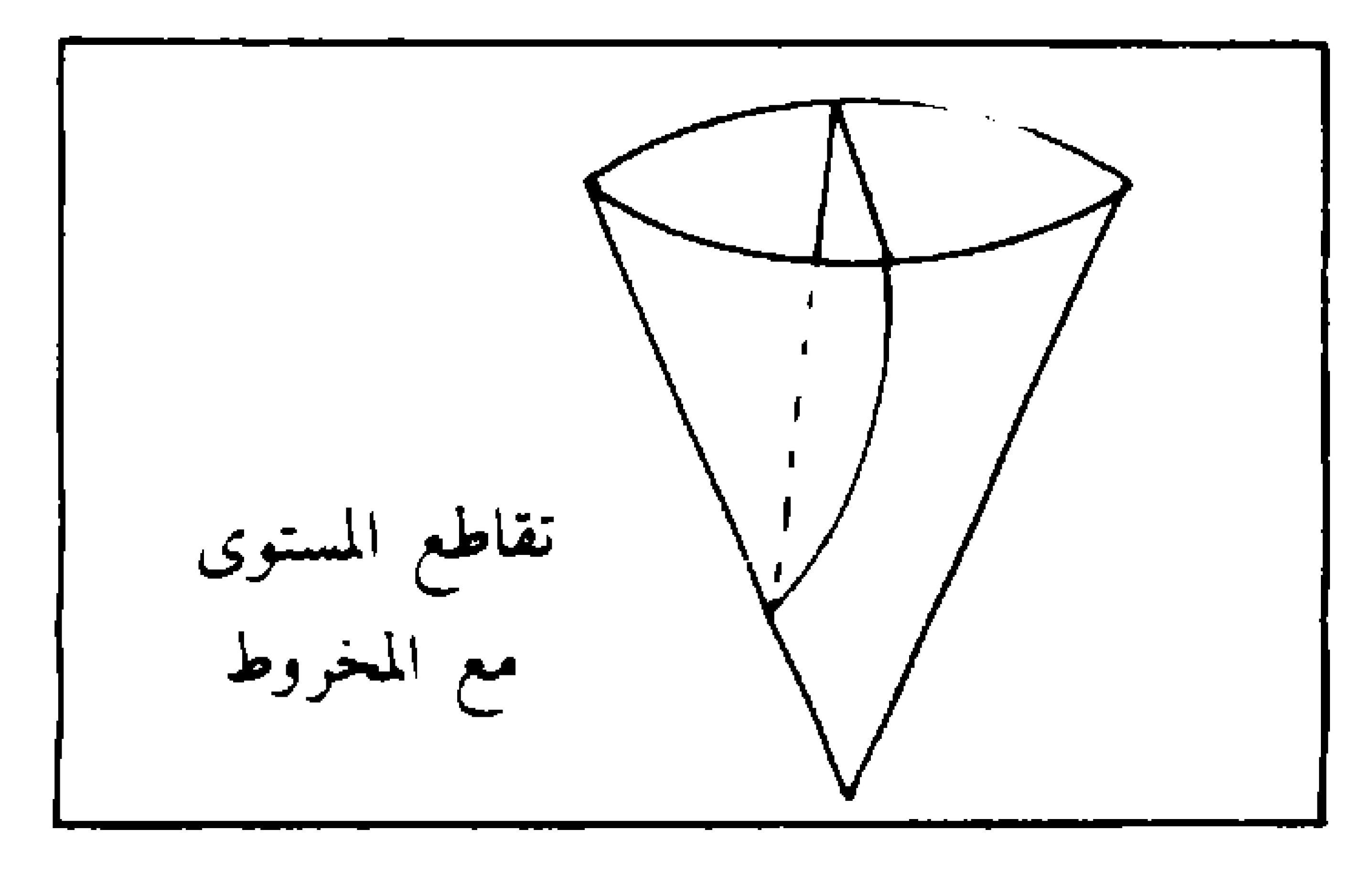
حيث h هو الارتفاع و r_1 و r_2 هما نصفا قطري القاعدتين. أما حجم القطعة الكروية ذات القاعدة الواحدة فيستخرج من القانون السابق بتعويض r_1 أو r_2 بالصفر.



قطعة كروية ذات قاعدتين — قطعة كروية ذات قاعدة

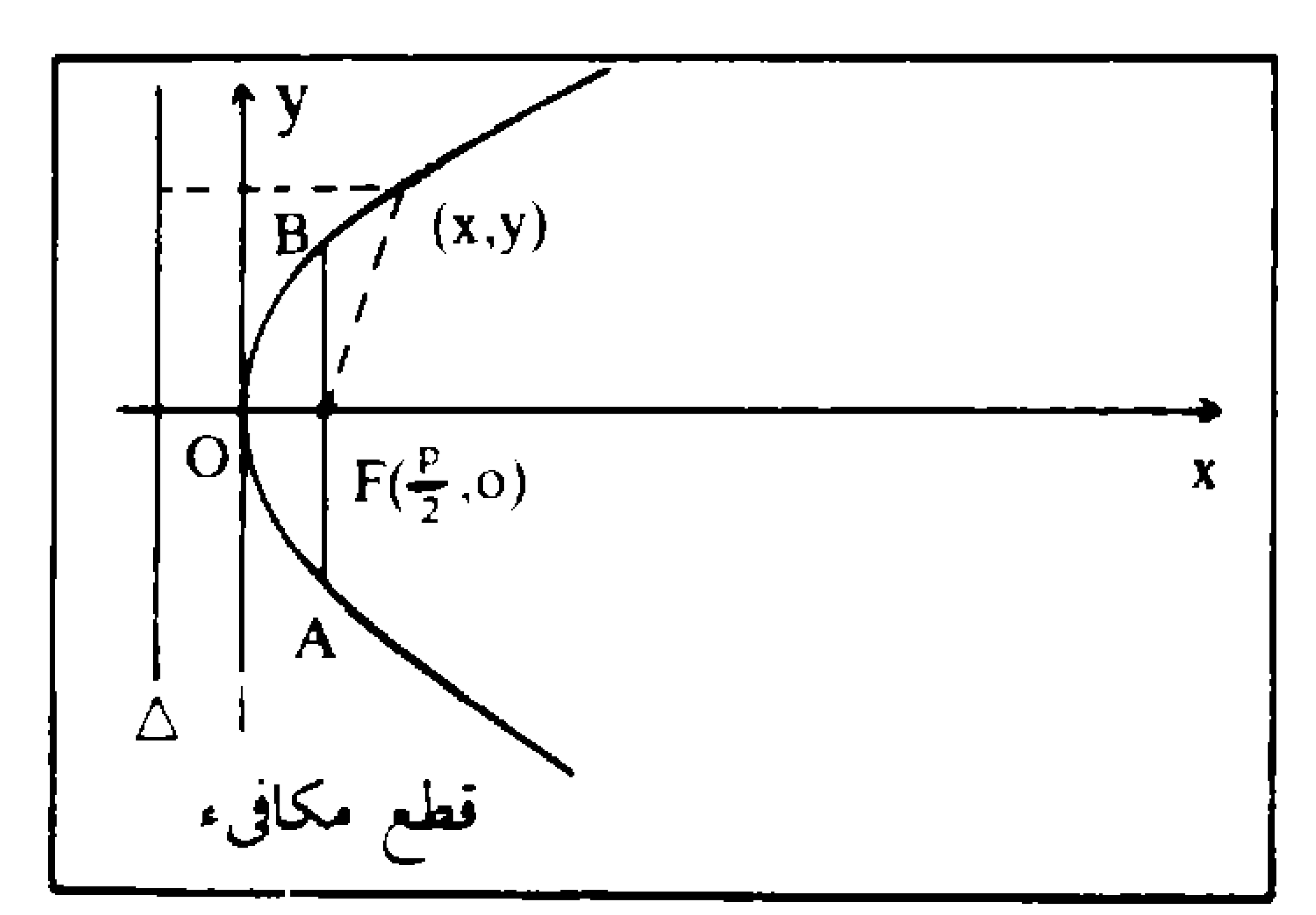
أنظر قطعة ـ قطعة مستقيم.

PARABOLA قطع مكافىء



هو المنحنى الناتج من تقاطع مخروط مع مستو مواز لأحد مولدات المخروط كما يبين الشكل.

كما أن القطع المكافىء هو المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن نقطة F ثابتة تسمى **البؤرة** ومستقيم ثابت Δ في المستوى يسمى **الدليل**. وتعطى معادلة القطع المكافىء في الاحداثيات الديكارتية بالعلاقة $y^2 = 2px$ وفي الاحداثيات القطبية بالعلاقة $r = \frac{p}{1 - \cos\theta}$ ومن الواضح أن ox هو محور تناظر القطع المكافىء. أما نقطة تقاطع القطع المكافىء مع المحور ox فتسمى **الذروة**.



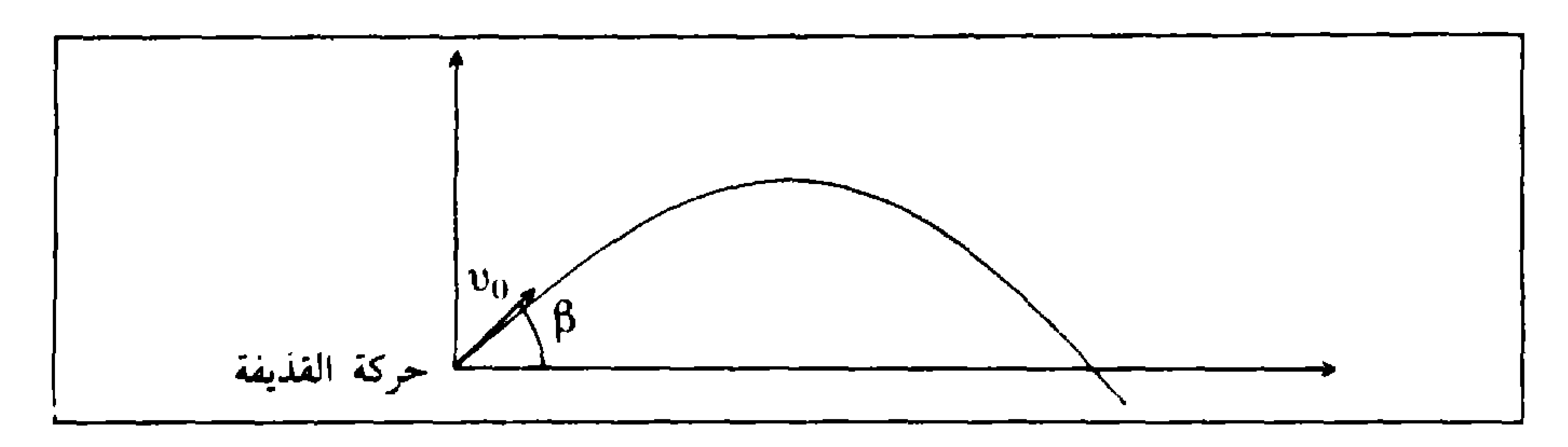
أما الوتر AB العمودي على محور القطع المكافىء والمار في البؤرة فيسمى الوتر البؤري العمودي.

- **قطع مكافىء ذو محور تناظر مواز للمحور ox:**

هو المنحنى الذي معادلته العامة $y = ax^2 + bx + c$ حيث a,b,c ثوابت. ويكون تقعر هذا المنحنى نحو الأعلى إذا كانت $a>0$ ونحو الأسفل إذا كانت $a<0$. أما محور تناظره فهو المستقيم $x = -\frac{b}{2a}$. ونشير هنا إلى أن هذا المنحنى يمثل مسار قذيفة سرعتها الابتدائية β, υ_0 هو زاوية الإطلاق مع الأفق. وتعطي معادلة القطع المكافىء الذي يمثل مسار القذيفة عندئذٍ **بالمعادلات الوسيطية**:

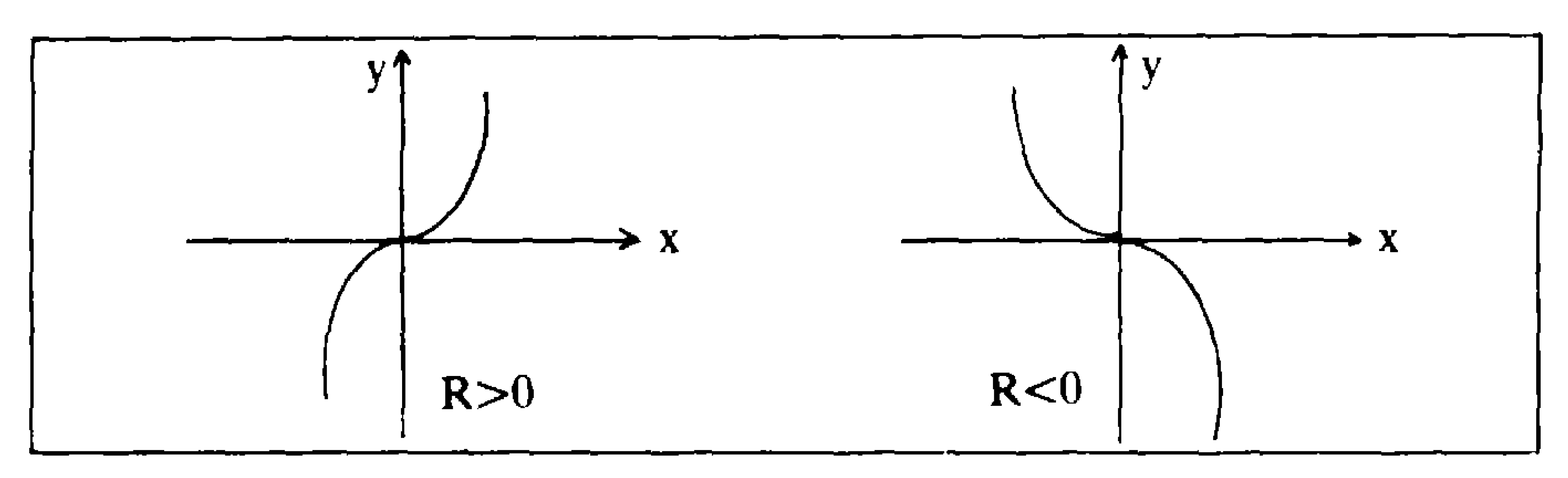
$$x = \upsilon_0 t \cos\beta,\ y = \upsilon_0 t \sin\beta - \frac{1}{2}gt^2$$

حيث g هي تسارع الجاذبية و t الزمن (الوسيط).



● **قطع مكافىء تكعيبي:**

هو بيان المعادلة $y = kx^3$ وهو المنحنى الممثل على الشكل أدناه.

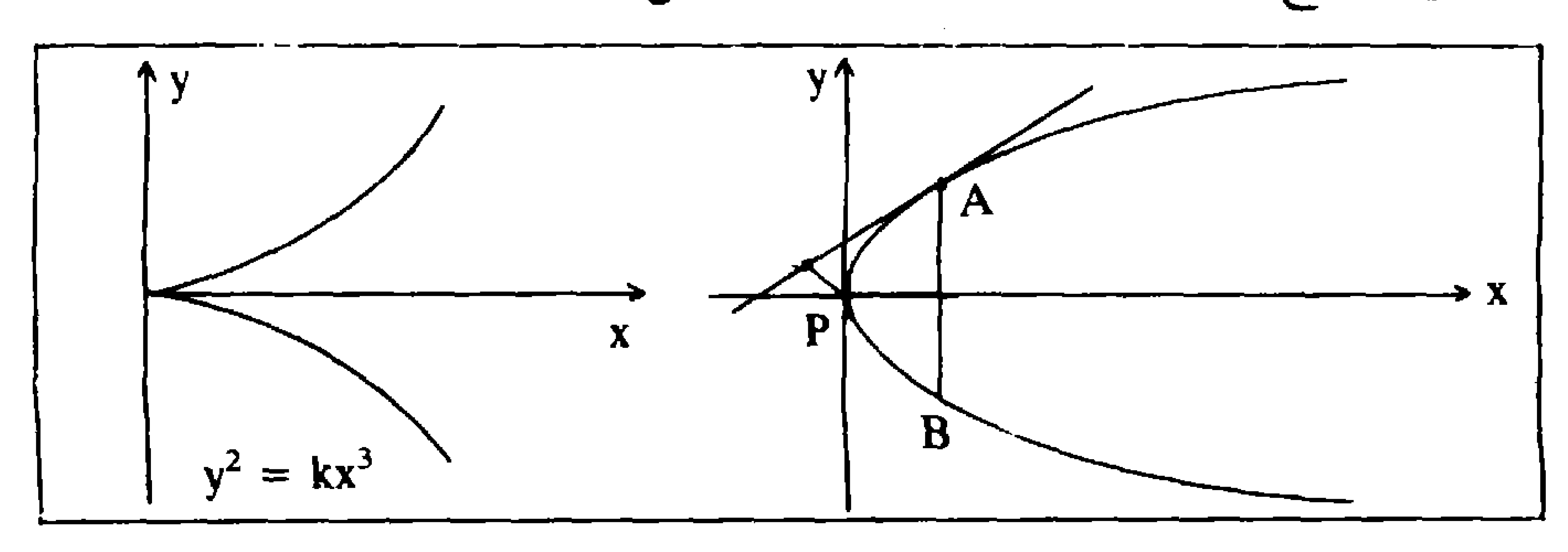


حيث يمس هذا المنحنى ox في النقطة (0,0) التي تمثل نقطة انعطاف للمنحنى.

● **قطع مكافىء مثيل التكعيبي:**

هو المنحنى الممثل بالمعادلة $y^2 = kx^3$، ولهذا المنحنى قرنة في النوع الأول في نقطة الأصل حيث يكون ox مماساً مضاعفاً للمنحنى.

وهذا المنحنى هو المحل الهندسي لنقط تقاطع الوتر المتغير AB العمودي على محور القطع المكافىء مع المستقيم المار في ذروة القطع P والعمودي على المماس للقطع عند النقطة B,A كما يبين الشكل.



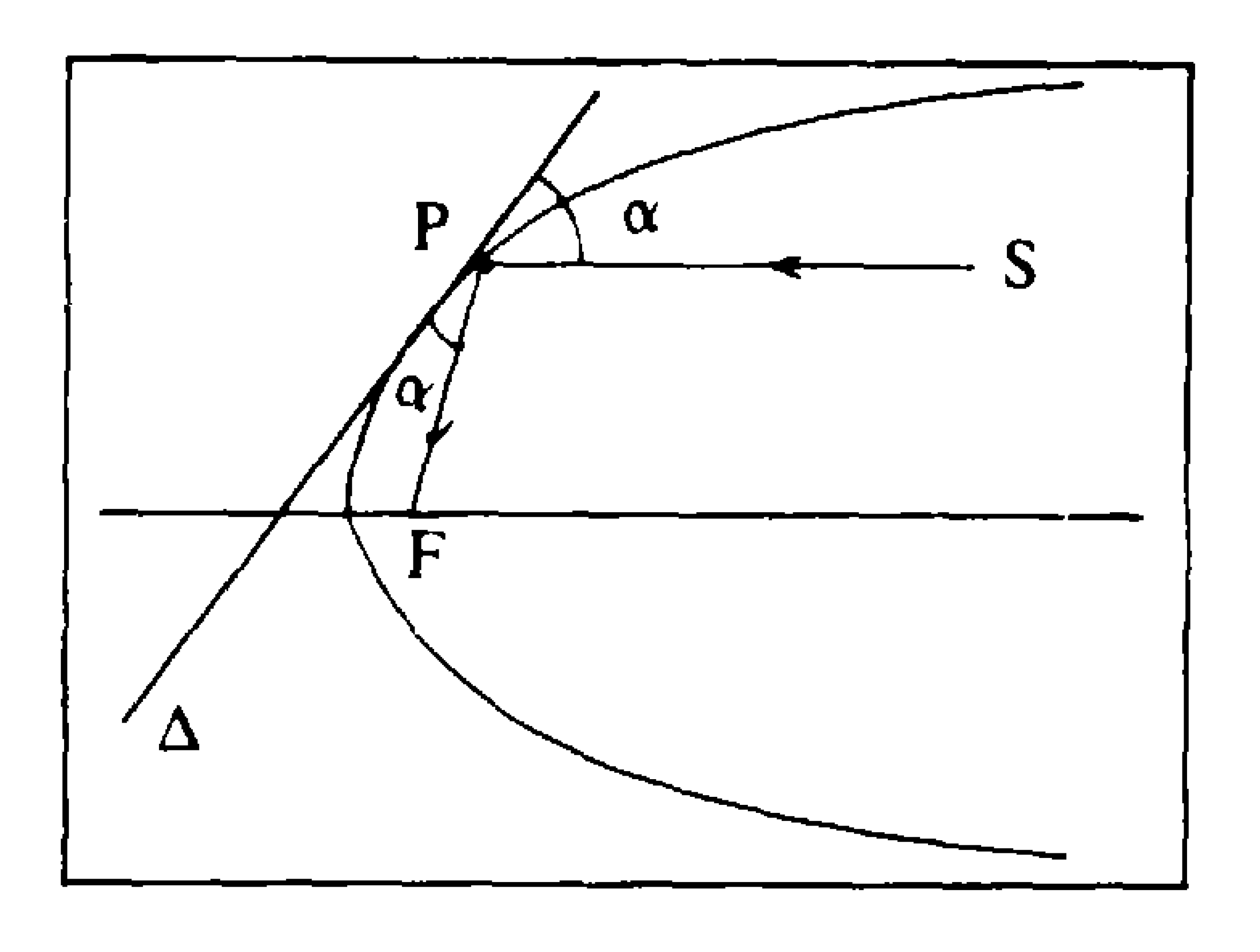
● **وتر قطع مكافىء:**

هو أي قطعة مستقيمة يقع طرفاها على القطع المكافىء.

● **قطر القطع المكافىء:**

هو المحل الهندسي لمنتصفات أوتار قطع مكافىء موازية لمنحنى ثابت. ونشير هنا إلى أن أي مستقيم مواز لمحور القطع هو قطر للقطع بالنسبة لمجموعة أوتار موازية لمنحنى معين ثابت. (انظر الشكل).

انظر قطر مخروط.



● **الخاصية البؤرية للقطع المكافىء:**

إن نصف القطر البؤري FP يصنع من المماس Δ في P نفس الزاوية التي يصنعها المستقيم PS الموازي لمحور القطع.

وتعرف هذه الخاصية باسم **خاصية الانعكاس** أو الخاصية البصرية أو **الخاصية الصوتية للقطع**. وهذا يعني أن المرآة العاكسة التي وجهها العاكس هو الوجه الداخلي للقطع سوف تجمع الأشعة الضوئية المتوازية القادمة إليها في F (البؤرة) وبالعكس لو وضعنا منبعاً ضوئياً في F فإن الأشعة الضوئية تخرج بعد انعكاسها على مرآة متوازية.

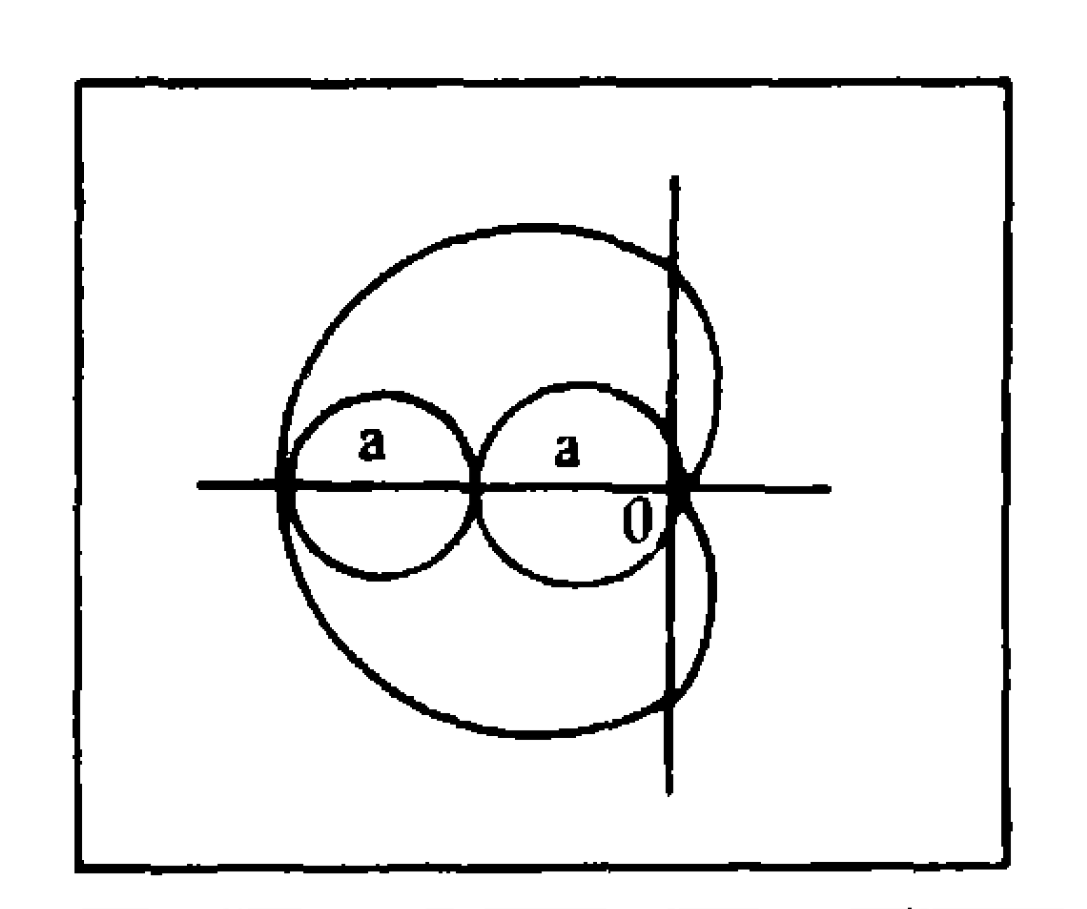
ويتم شرح الخاصية الصوتية بصورة مشابهة.

قفزة **JUMP**

أنظر انقطاع.

قلبـي **CARDIOID**

القلبـي هو المحل الهندسي (في المستوى) لنقطة ثابتة على دائرة إذا تدحرجت هذه الدائرة على دائرة أخرى ثابتة ومساوية للدائرة الأولى، والمعادلة القطبية للقلبـي هي: $r = 2a \sin^2 \frac{1}{2} \phi = a(1 - \cos \phi)$



حيث يقع القطب على الدائرة الثابتة والمحور القطبي على قطرها. أما a نصف قطر كل من الدائرتين، القلبي فهو دوري خارجي من عروة واحدة وهو حالة خاصة من صدفي الدائرة.

القلصاوي KALSAWI (1410-1486)

من مشاهير الرياضيين العرب في القرن الخامس عشر الميلادي. ولد في بسطة في الأندلس وأقام في غرناطة وتوفي في «باجة» في تونس كما أنه رحل إلى المشرق واتصل بعلمائه. اشتهر في الحساب وألف فيه بحوثاً قيمة مثل «كتاب كشف الأسرار عن علم الغبار» ويظهر فيه بجلاء استعماله للرموز والإشارات الجبرية فمثلاً استعمل حرف ج للجذر، وحرف ش (شيء) للمجهول، والحرف م (مال) لمربع المجهول، وحرف ك (مكعب) لمكعب المجهول. كذلك استعمل الحرف ل لعلامة =. وأشهر مؤلفات القلصاوي كتاب «كشف الجلباب عن علم الحساب» بأربعة أجزاء، واختصره بكتابه المعنون «كشف الأسرار عن علم حروف الغبار».

قَنَوي

● سطح قنوي:

غلاف عائلة وحيدة الوسيط من الكرات يسمى **بالسطح القنوي**. وإذا كانت مراكز الكرات تقع على المنحنى $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P}(t)$ وكانت أنصاف أقطار هذه الكرات عند النقطة t تساوي $\alpha(t)$ فإن معادلة عائلة الكرات تكون:

$$[\overrightarrow{R} - \overrightarrow{P}(+)]^2 - [\alpha(+)]^2 = 0$$

حيث t هو وسيط العائلة. ولذا فإن عائلة الغلاف يمكن إيجادها من جملة المعادلات $(\overrightarrow{R} - \overrightarrow{P})^2 - \alpha^2 = 0,\ (R - P)P^{\bullet} + \alpha\alpha^{\bullet} = 0$ ولا يوجد في هذه الحالة أية نقاط منفردة على السطوح.

قوي STRONG

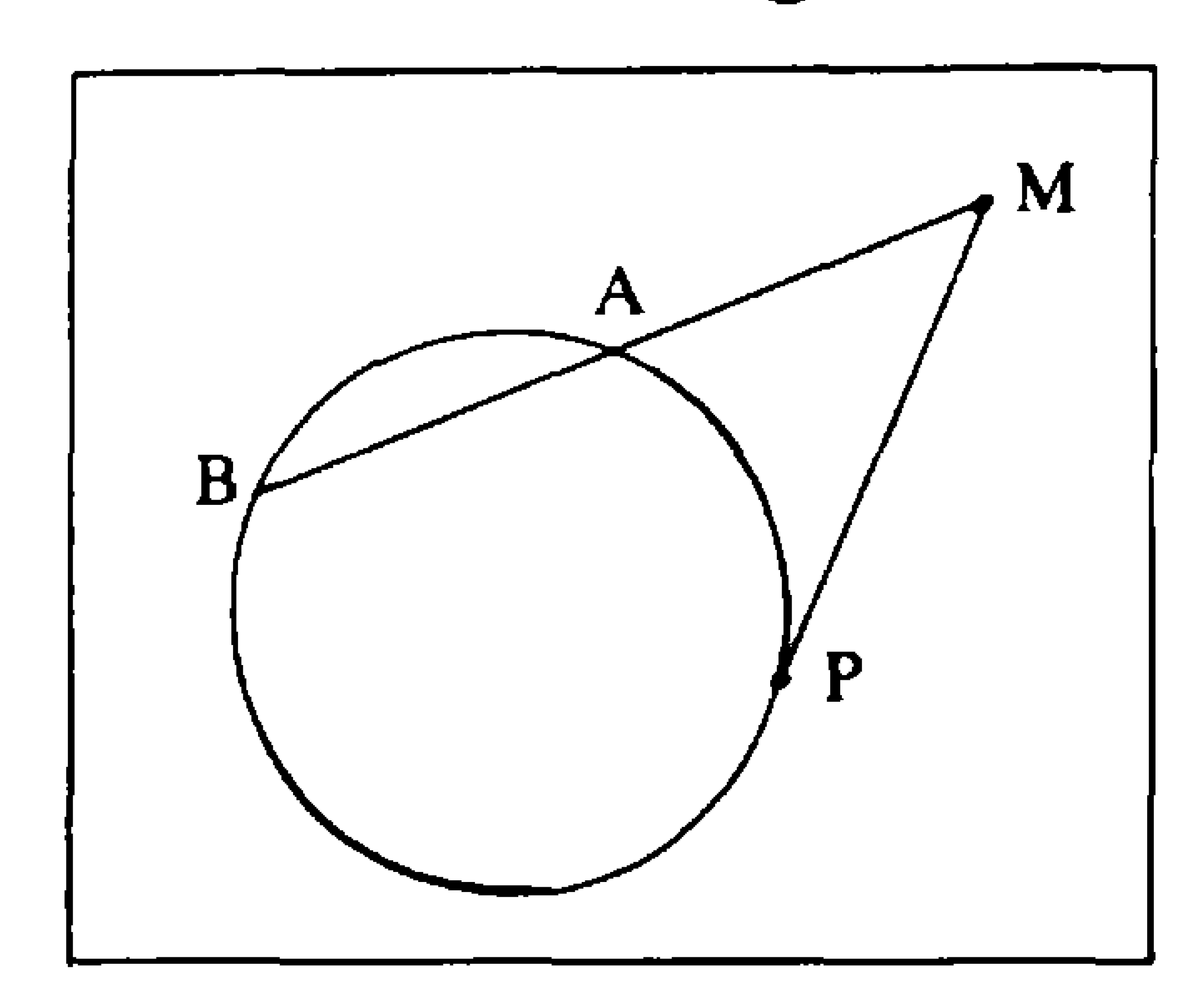
طوبولوجي قوي:
انظر طوبولوجي ـ طوبولوجي الفضاء.

- **قانون الأعداد الكبيرة القوي:**
انظر كبير ـ قانون الأعداد الكبيرة.

قوة POWER

انظر أس.

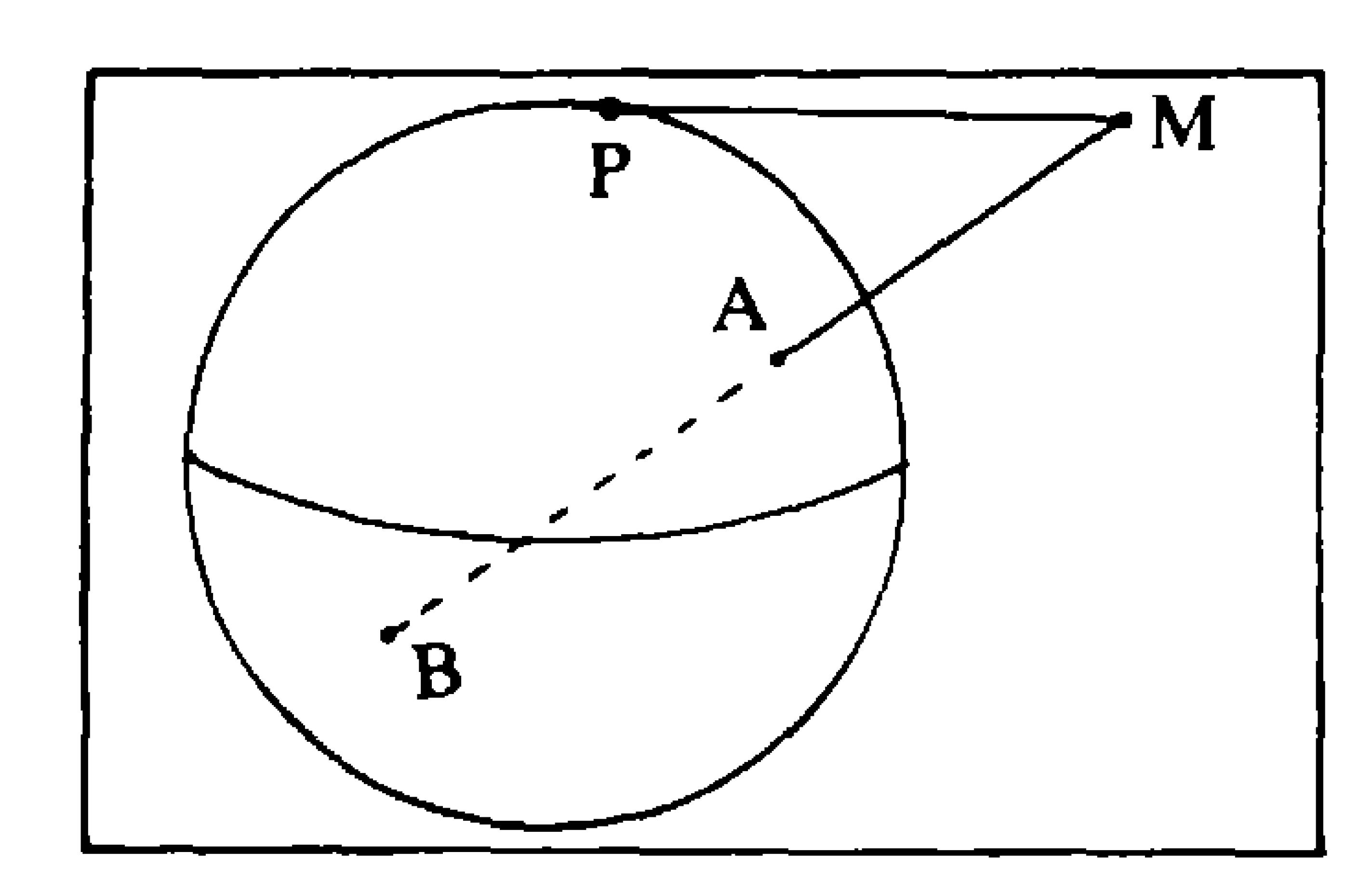
- **مبرهنة آبل لمتسلسلات القوى:** انظر آبل.
- **فرق كميتين ذات قوتين متساويتين:** انظر تفاضل.
- **مكاملة متسلسلة قوى:** انظر متسلسلة.
- **قوة كاملة:** انظر كامل.
- **راسب قوة:** انظر راسب.
- **متسلسلة قوى:** انظر متسلسلة.
- **قوة مجموعة:** انظر رئيس ـ عدد رئيس.
- **قوة اختبار الفرض:** انظر فرض.
- **مجموع كميتين ذات قوتين متساويتين:** انظر مجموع.
- **قوة نقطة بالنسبة لدائرة:**



لتكن لدينا الدائرة C والنقطة M خارج C. إذا رسمنا أي قاطع MAB للدائرة فإن قوة M بالنسبة للدائرة C والتي نرمز لها بـ k تعطى بالعلاقة

$k = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$.

وهذه القيمة ثابتة من أجل أي قاطع وهكذا فإن $k = MP^2$ حيث MP هو مماس للدائرة C. فإذا كانت معادلة الدائرة C هي
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$
(a,b) مركزها و R نصف قطرها. فإن قوة النقطة $M_0(x_0,y_0)$ بالنسبة لهذه الدائرة تعطى بالعلاقة: $k = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2$



● **قوة نقطة بالنسبة لكرة:**

لتكن لدينا كرة S و M نقطة خارجة عنها، فإن قوة النقطة M بالنسبة للكرة S هو بالتعريف $K = \overline{MA} . \overline{MB}$ حيث M A B هو قاطع للكرة.

والمقدار k ثابت مهما يكن القاطع ولهذا فإن $k = \overline{MP}^2$ حيث MP هو مماس للكرة S. فإذا كانت معادلة الكرة هي:
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$
حيث (a,b,c) مركزها و R نصف قطرها فإن قوة النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ بالنسبة للكرة S تعطى بالعلاقة:
$$k = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - R^2$$

قوة FORCE

● **أنبوب القوة:**

هو أنبوب سطح حدوده مكون من خطوط قوة. وبشكل عام إذا كان لدينا منحنى مغلق C لا يكون أي جزء فيه خط قوة. وإذا مر بكل نقطة فيه خط قوة فإن المجموعة المكونة من هذه الخطوط تشكل حدود أنبوب القوة.

● **عزم القوة:** انظر عزم.

● **القوة المركزية الجاذبة:** انظر تحت هذا العنوان.

● **القوة المركزية الطاردة**: انظر تحت هذا العنوان.

● **القوة المحافظة**: انظر محافظ.

● **القوة المحركة الكهربائية**: انظر **قوة محركة كهربائية**.

● **متجه القوة**:

هو متجه يساوي مقداره مقدار القوة واتجاهه مواز لخط فعل القوة.

● **متوازي أضلاع القوى**:

انظر متوازي **أضلاع** ـ متوازي أضلاع القوى.

● **مجال القوة**:

هو منطقة في الفضاء بحيث إذا وضع أي كائن عند نقطة فيها فإنه يتعرض لقوة مؤثرة عليه. فمثلاً إذا كان لدينا منطقة بحيث إذا وضعت شحنة كهربائية ساكنة عند أية نقطة فيها فإنها تتعرض لقوة فإننا نقول إن هذه المنطقة تحمل **مجال قوة سكون كهربائية**.

● **مسقط القوة**:

انظر **إسقاط** ـ إسقاط عمودي.

● **وحدة القوة**:

هي القوة اللازمة لإعطاء وحدة تسارع لوحدة كتلة. ويقال إن القوة مقدارها **داين** إذا كان لنتيجة تأثيرها لمدة ثانية واحدة على كتلة مقدارها 1 غرام فإن سرعة الكتلة تزداد بمقدار 1 سنتمتر في الثانية. ويكون مقدار القوة مساوياً 1 باوندال إذا كان لنتيجة تأثيرها لمدة ثانية واحدة على كتلة مقدارها 1 باوند فإن سرعة الكتلة تزداد بمقدار 1 قدم في الثانية.

قوة محركة كهربائية — ELECTROMOTIVE FORCE

للقوة المحركة الكهربائية ثلاثة معان نوردها فيما يلي:

(1) القوة التي تسبب سريان التيار الكهربائي.

(2) الطاقة المضافة في وحدة الشحنة بسبب فعل ميكانيكي أو كيميائي مولد للتيار الكهربائي.

(3) فرق في دارة مفتوحة الكمون بين طرفي خلية أو مولد.

CEMTRIPETAL FORCE **قوة مركزية جاذبة**

هي القوة التي تمنع جسمًا متحركاً من الانطلاق في خط مستقيم. تتجه هذه القوة نحو مركز التقوس. هي قوة مساوية في المقدار ومختلفة في الإشارة عن القوة المركزية الطاردة.

CENTRIFUGAL FORCE **قوة مركزية طاردة**

---

(1) إذا كانت هناك كتلة مقيدة الحركة على ممر. فإن القوة المركزية الطاردة هي تلك القوة التي تبذلها الكتلة على المُقَيِّد في اتجاه مواز لنصف قطر التقوس.

(2) إذا كان هناك جسيم كتلته m يدور بسرعة زاوية w حول نقطة O تبعد عن الجسيم مسافة r. فإن هذا الجسيم يتعرض لقوة، تسمى القوة المركزية الطاردة، مقدارها mw^2r (أو mv^2/r حيث أن v هي السرعة العددية للجسيم بالنسبة للنقطة O) تتجه هذه القوة بعيداً عن مركز التدوير. أما القوة التي تساويها في المقدار وتختلف عنها في الإشارة (أي أن لها الاتجاه المعاكس) فتسمى **قوة مركزية جاذبة**.

PARENTHESES **قوسان صغيران**

هما القوسان ( ) المستخدمان للدلالة على أخذ مجموعة من الكميات مع بعضها كأن نكتب 5(3−7+8)، أي أن ما داخل القوسين يؤخذ كله معاً.

انظر تكديس، تجميع؛ انظر توزيعي ـ قانون توزيعي.

قوس ARC

هو قطعة من منحن. ويمكن تعريفه على الشكل التالي:

(1) هو صورة لفترة مغلقة [a,b] تحت تأثير دالة متباينة ومستمرة ويكون القوس بهذا المعنى منحنياً بسيطاً غير مغلق.

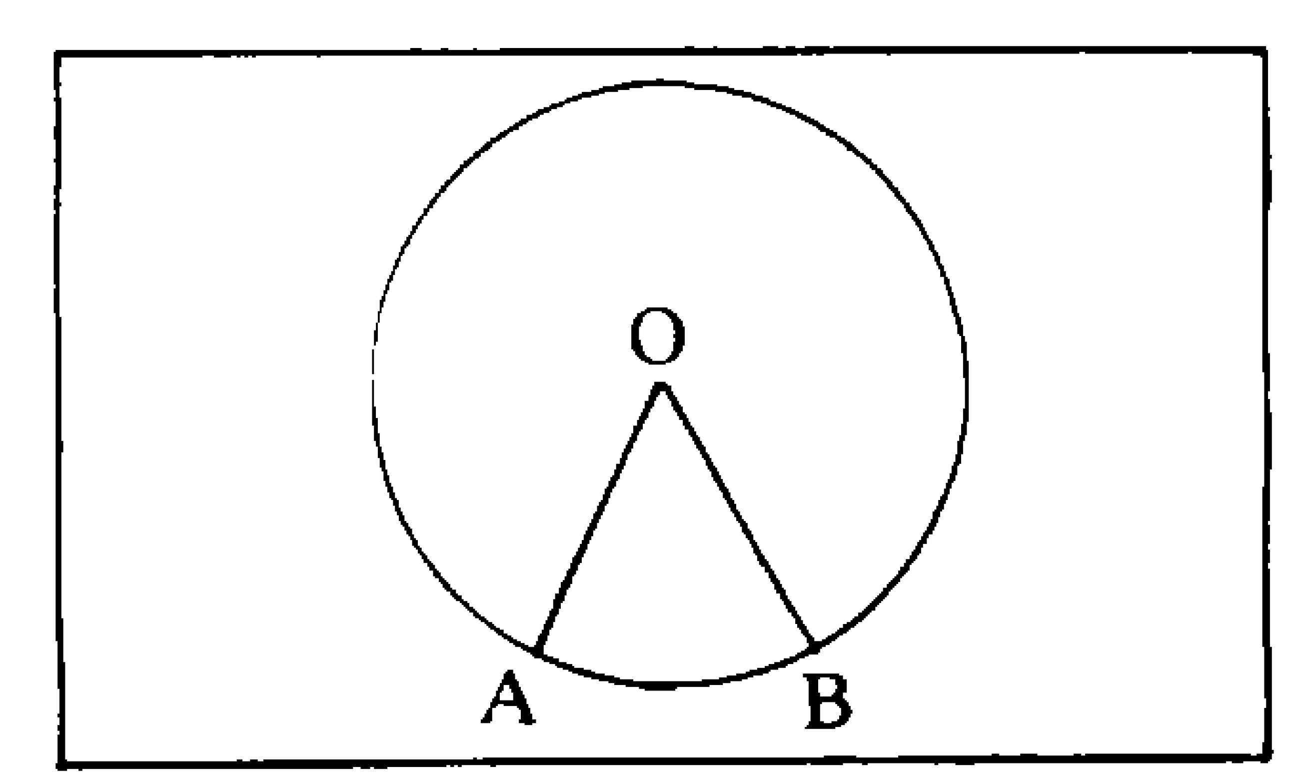
(2) هو منحن غير مغلق. إذا كان المنحنى صورة مستمرة للفترة [a,b] فإن القوس من هذا المنحنى هو صورة أي فترة جزئية [c,d] من الفترة [a,b].

- **طول القوس:**

انظر **طول** ـ طول منحن.

- **درجة القوس:**

إذا كان لدينا قوس من دائرة ويقابل زاوية مركزية قيمتها درجة واحدة، نقول إن درجة القوس هي واحد. ودرجة القوس بشكل عام هي قيمة الزاوية المركزية التي يقابلها هذا القوس. في الشكل مثلاً درجة القوس هي قيمة الزاوية AOB.

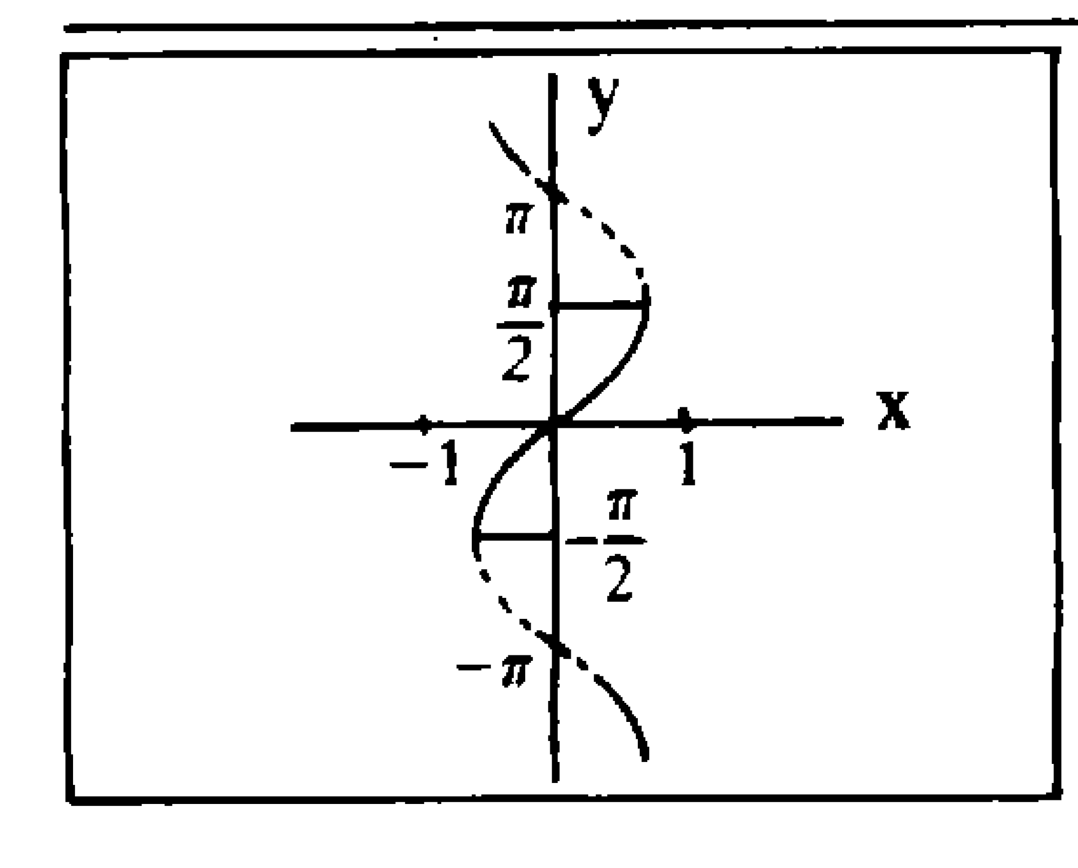


- **تفاضل (أو عنصر) قوس:** انظر **عنصر** ـ عنصر مكاملة.
- **نهاية النسبة بين القوس ووتره:** انظر نهاية.
- **قوس صغير في دائرة:** انظر **قطاع** ـ قطاع دائرة.

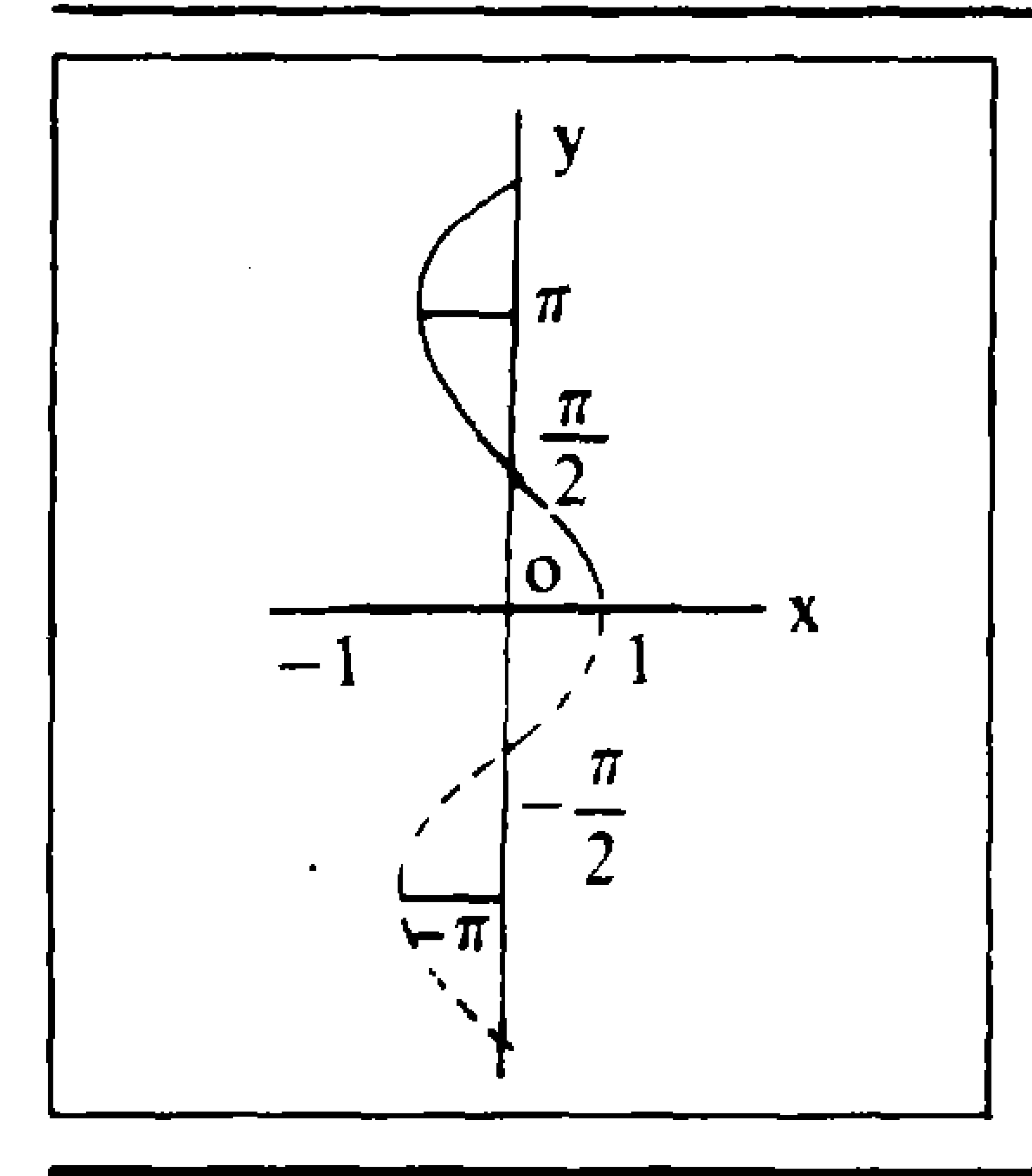
قوس جيب ARC SINE

قوس جيب عدد x هو الزاوية أو العدد الذي يكون x جيبه ونرمز له بالشكلين arc sin x ، $\sin^{-1}x$. مثلاً $\arc\sin \frac{1}{2}$ هو 30° أو 150° أو بشكل عام $180^{\circ}n + (-1)^{n}30^{\circ}$.

انظر **مثلثي**.



ARC COSINE — قوس جيب تمام



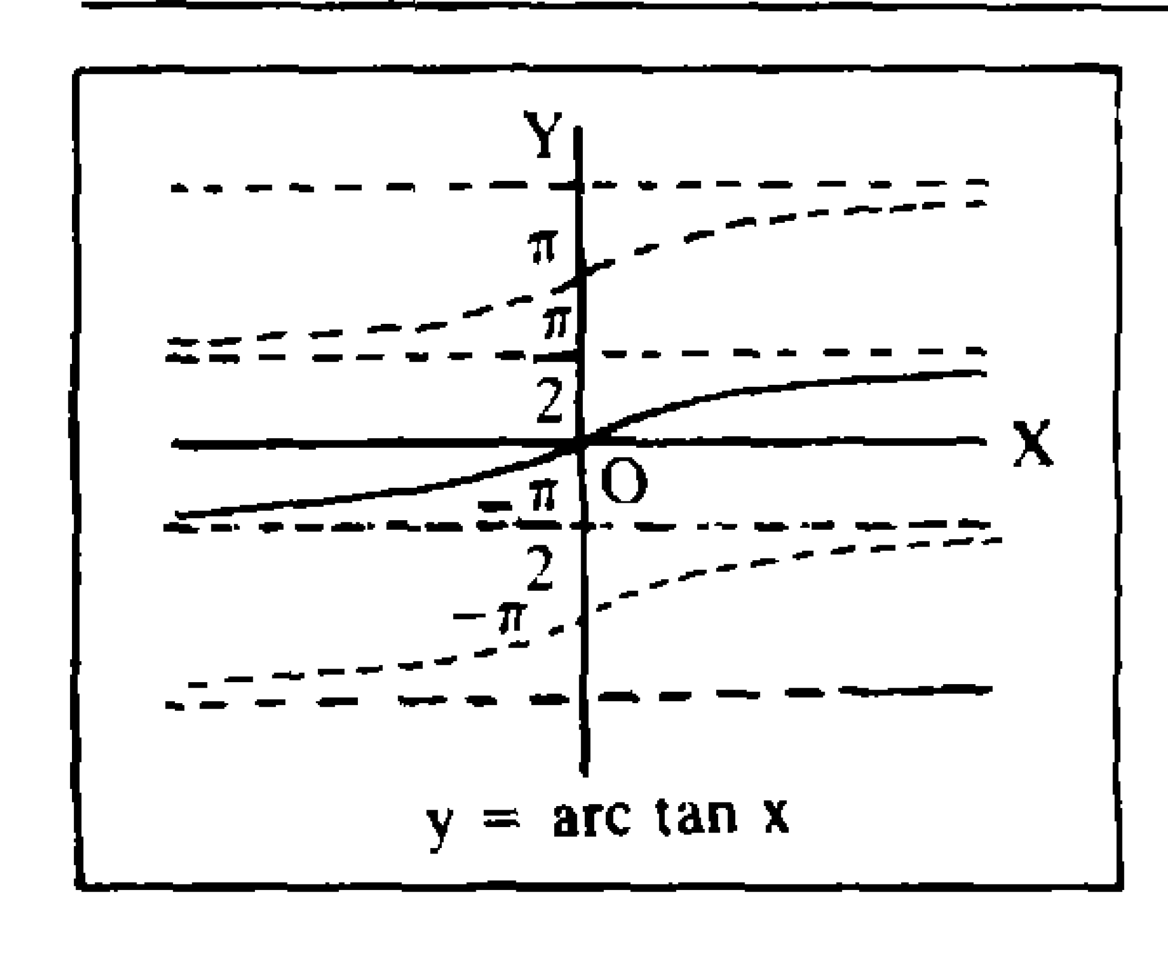
قوس جيب تمام لعدد x هو الزاوية أو العدد الذي يكون x جيب تمامه. ونرمز له بالشكلين $\cos^{-1} x$, arc cos x. مثلاً arc cos $\frac{1}{2}$ هو $60°$ أو $300°$ أو بشكل عام $360°n \pm 60°$.

انظر مثلثي.

ARCHYPERBOLIC — قوس زائدي

انظر زائدي.

ARC TANGENT — قوس ظل

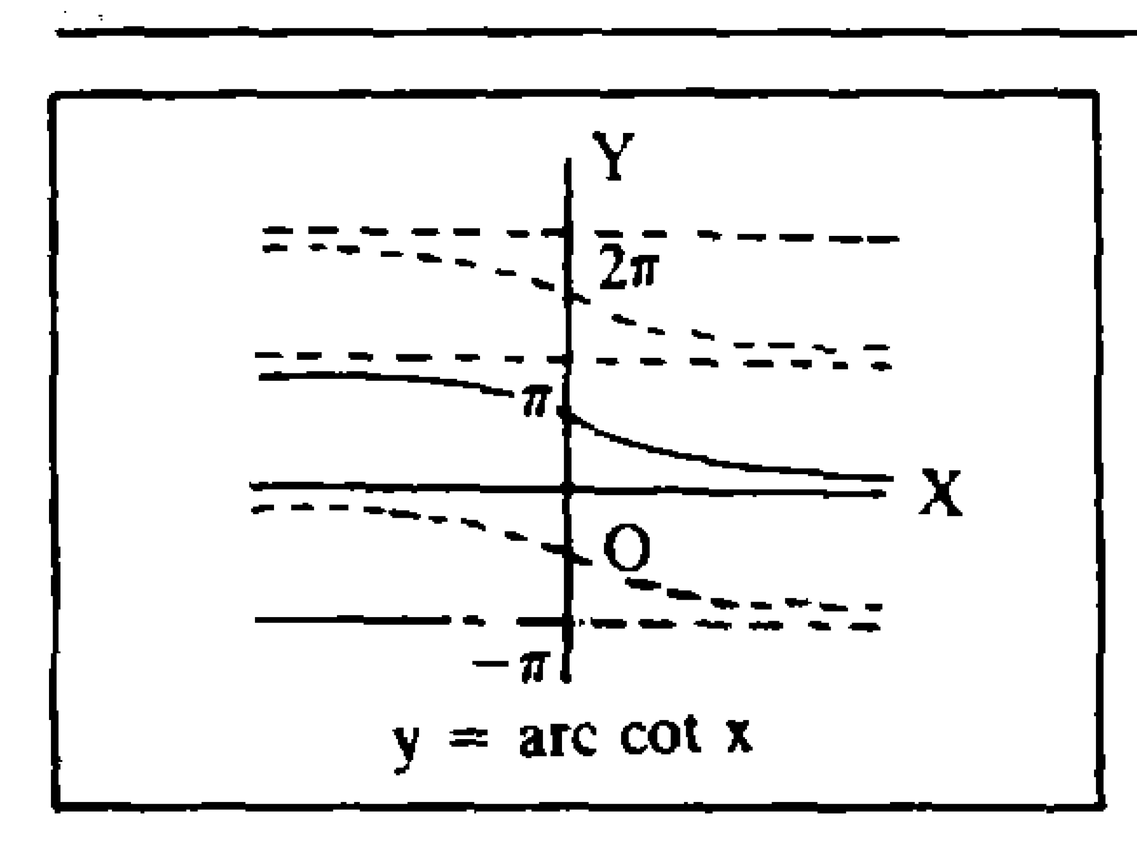


y = arc tan x

قوس ظل عدد x هو الزاوية أو العدد الذي يكون x ظله. ونرمز له بالشكلين arc tan x, $\tan^{-1}x$. مثلاً arc tan 1 هو $45°$ أو $225°$ أو بشكل عام $180°n + 45°$.

انظر مثلثي.

ARC COTANGENT — قوس ظل تمام



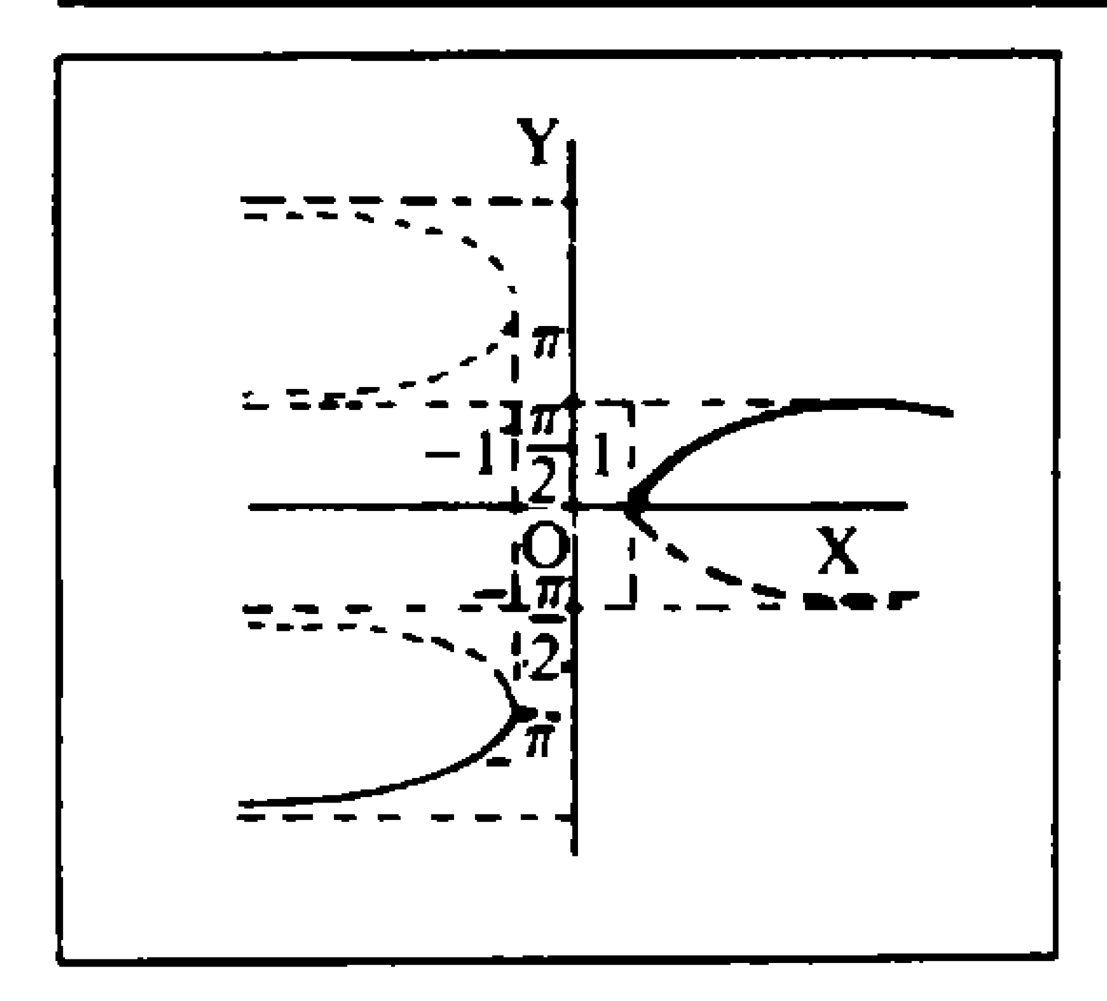
y = arc cot x

قوس ظل تمام لعدد x هو الزاوية أو العدد الذي يكون x ظل تمامه. ونرمز له بالأشكال $\text{ctn}^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ أو arc cot x. مثلاً arc cot 1 هو $45°$ أو $225°$ أو بشكل عام $180°n + 45°$.

انظر مثلثي.

قوس قاطع ARCSECANT

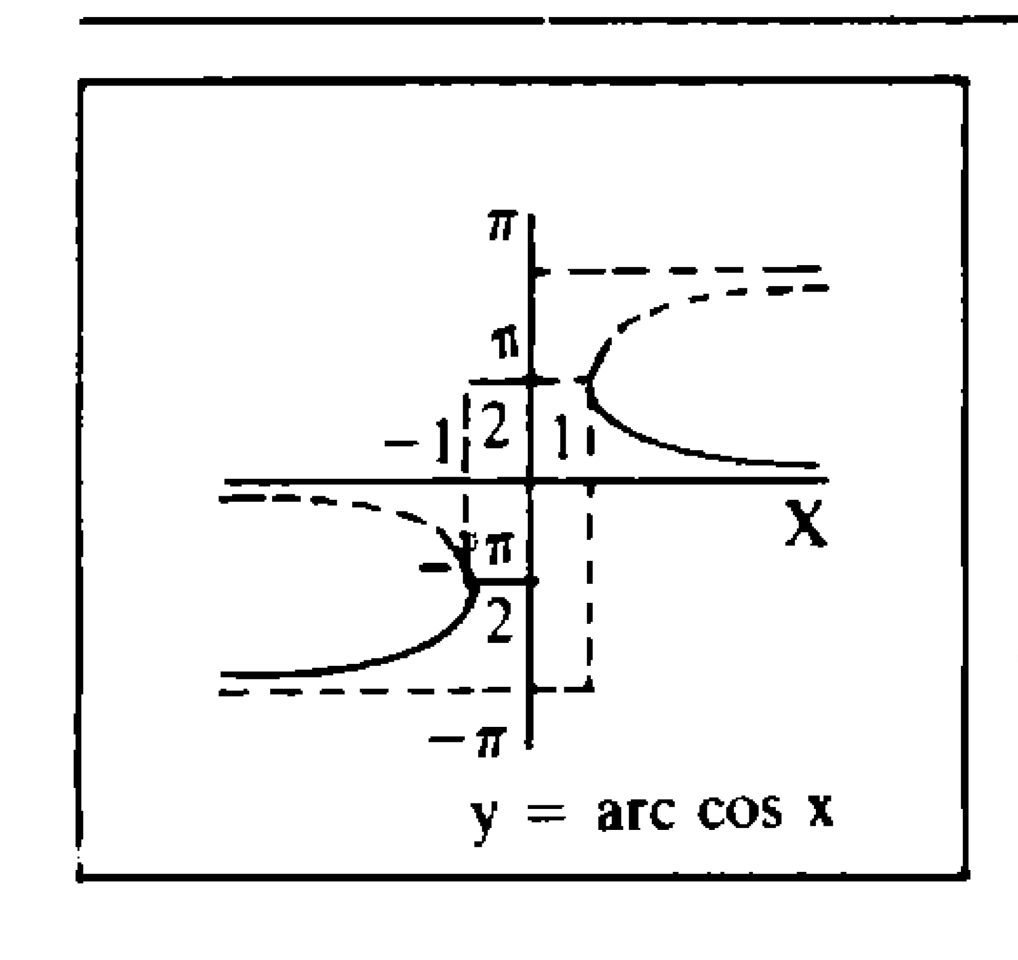
قوس قاطع عدد x هو الزاوية أو العدد الذي يكون x قاطعه ونرمز له بالشكلين arc sec x, $sec^{-1}x$. مثلاً arc sec 2 هو 60^o أو 300^o أو بشكل عـام $360^o n \pm 60^o$.



انظر مثلثي.

قوس قاطع تمام ARC COSECANT

قوس قاطع تمام لعدد x هو الزاوية أو العدد الذي يكون x قاطع تمامه. ونرمز له بالشكلين arc csc x, $csc^{-1}x$. مثلاً $csc^{-1}(2)$ هو الزاوية التي يكون قيمتها 30^o أو 150^o أو بشكل عام $180^o n + (-1)^n 30$.



انظر مثلثي.

وفي الشكل نأخذ قيم y بالراديان.

قوس كبير BRACE

انظر تكديس، تجميع.

قوس لي

إذا كان M منطوياً تفاضلياً وكان [X,Y] حقلي متجهات يلتقي مجالاهما في مجموعة مفتوحة U، فإننا نستطيع أن نعرف حقل متجهات [X,Y] على U بحيث يكون $[X,Y] = XY - YX$. ونسمي الحقل الجديد [X,Y] بـأنه قـوس لي للحقلين X و Y.

قوس متوسط BRACKET

انظر تكديس، تجميع.

قياس MEASURE

وقياس الشيء هو مقارنته ببعض الوحدات القياسية المتعارف عليها.

- **القياس الزاوي:**

هو نظام لقياس الزوايا. (انظر **درجة وميل وراديان وستوني**).

- **قياس كاراثيودوري:**

هو دالة تقرن كل مجموعة M بعدد لا سالب $\mu^*(M)$ بحيث:

(1) $\mu^*(R) \leq \mu^*(S)$ إذا كانت $R \subset S$.

(2) $\mu^*(\cup R_i) \leq \Sigma \mu^*(R_i)$ لأية متتالية من المجموعات $\{R_i\}$.

(3) $\mu^*(R \cup S) = \mu^*(R) + \mu^*(S)$ إذا كانت المسافة بين R و S موجبة (لا تساوي صفراً).

ونقول إن المجموعة R **قابلة للقياس** إذا كان:

(1) $\mu^*(E) = \mu^*(R \cap E) + \mu^*(R^c \cap E)$ لكل مجموعة E حيث R^c متممة R.

وتكون المجموعة المحدودة R من الأعداد الحقيقية (أو مجموعة في فضاء إقليدي بعديته n) قابلة لقياس ـ ليبيغ إذا وفقط إذا كان:

(2) $m^*(E) = m^*(R \cap E) + m^*(R^c \cap E)$ لكل مجموعة محدودة E حيث μ^* القياس الخارجي لليبيغ. وتسمى الصيغة (2) باختيار **كاراثيودوري لقابلية القياس**.

- **القياس الدائري:**

(1) نفس القياس الزاوي.

(2) قياس الزوايا بالراديان.

● **القياس المشترك**:

نفس القاسم المشترك.

● **التقارب في القياس**:

انظر **تقارب**.

● **القياس التكعيبي**:

هو قياس الحجوم بدلالة مكعب يكون حرفه مساوياً لوحدة خطية قياسية.

● **القياس العشري**:

انظر **عشري** ـ القياس العشري.

● **القياس الداخلي والخارجي**:

لتكن E مجموعة من النقاط ولتكن S مجموعة منتهية أو لا منتهية عدياً من الفترات (المفتوحة أو المغلقة) بحيث تنتمي كل نقطة في E لفترة واحدة على الأقل في S.

ونعرف **القياس الخارجي** للمجموعة E بأنه أكبر حد سفلي لمجموع قياسات الفترات في S لكل المجموعات المحققة لشروط S أو كل المجموعات التي على شاكلة S. لنفرض أن E محتواة في فترة I ولتكن E^c متممة E في I. فإننا نعرف **القياس الداخلي** للمجموعة E بأنه الفرق بين قياس I والقياس الخارجي للمجموعة E^c. والقياس الداخلي لمجموعة ما يساوي دائمًا أصغر حد علوي للقياسات الداخلية لمجموعاتها الجزئية المحدودة. وإذا كانت المجموعة E مفتوحة أو مغلقة فإن قياسها الداخلي يساوي قياسها الخارجي وفي هذه الحالة تسمى هذه القيمة المشتركة **بقياس E**.

والجدير بالذكر هنا أن **القياس الخارجي** للمجموعة E يساوي أكبر حد سفلي لكل قياسات المجموعات المفتوحة التي تحتوي على E كما أن **القياس الداخلي** للمجموعة E يساوي أصغر حد علوي لكل قياسات المجموعات المغلقة المحتواة في E. ويكون قياس فترة على خط مستقيم مساوياً لطولها.

وتعرف الفترة I في فضاء بعديته n بأنها «متوازي سطوح مستطيلي معمم» مكون من كل النقاط $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بحيث $a_i \leq x_i \leq b_i$ لكل i حيث b_i, a_i أعداد معطاة. وقياس I يساوي الجداء $(b_1-a_1)(b_2-a_2) \ldots (b_n-a_n)$. ويعطي نفس التعريف لقياس الفترة المفتوحة والمفتوحة جزئياً والمغلقة جزئياً.

● **قياس هار:**

لتكن G زمرة طوبولوجية متراصة محلياً ولتكن S الحلق من σ المولدة من المجموعات المتراصة في G. نعرف **قياس هار** على S على أنه دالة m تعين لكل $E \epsilon S$ عدداً حقيقياً لا سالباً $m(E)$ وبحيث تحقق m الخواص التالية:

(1) يوجد $A \epsilon S$ بحيث $m(A) \neq 0$.

(2) إما أن يكون m بحيث $m(aE) = m(E)$ $(m(Ea) = m(E)$ $E \epsilon S, \ a \epsilon G$ حيث:

$$Ea = \{\{xa \mid x \epsilon E\}, aE = \{ax \mid x \epsilon E\}$$

ولكل زمرة طوبولوجية متراصة محلياً يوجد قياس هار لا متغير يساري وآخر لا متغير يميني وكلاهما وحيد (مع عدم اعتبار القياس مختلفاً إذا ضرب في ثابت).

● **قياس ليبيغ:**

تكون **المجموعة المحدودة** في فضاء إقليدي قابلة لقياس ليبيغ إذا تساوى **قياساهما الداخلي والخارجي**. وتسمى القيمة المشتركة في هذه الحالة بقياس ليبيغ للمجموعة. وفي حالة المجموعة **اللامحدودة** S فإننا نعرف المجموعة W_1 المكونة من كل النقاط التي تنتمي لكل من S وفترة محدودة I. وفي هذه الحالة تكون المجموعة اللامحدودة S قابلة لقياس (ليبيغ) إذا وفقط إذا كانت W_1 قابلة للقياس لكل فترة محدودة I. ويكون قياس ليبيغ في هذه الحالة للمجموعة S مساوياً لأصغر حد علوي لقياسات المجموعات W_1 إذا كانت هذه المجموعات W_1 محدودة، وأما إذا لم تكن w_1 محدودة فإن S يكون لها قياس لا منته.

إن كل شرط من الشروط التالية يعتبر شرطاً لازماً وكافياً لكي تكون المجموعة B قابلة للقياس حسب ليبيغ:

(1) لكل عدد موجب ϵ يوجد مجموعة مغلقة F وأخرى مفتوحة G بحيث $F \subset B \subset G$ وبحيث يكون قياس $G-F$ أقل من ϵ.

(2) لكل عدد موجب ϵ توجد مجموعة مفتوحة G بحيث $B \subset G$ وبحيث يكون القياس الخارجي للمجموعة $G - B$ أقل من ϵ.

(3) لكل عدد موجب ϵ توجد مجموعة مغلقة F بحيث $F \subset B$ وبحيث يكون القياس الخارجي للمجموعة $B - F$ أقل من ϵ.

(4) يكون قياس كل فترة I مساوياً لمجموع القياسات الخارجية للمجموعتين $I \cap B$ و $I \cap B^c$ حيث B^c متممة B.

(5) القياس الخارجي لأية مجموعة S يساوي مجموع القياسات الخارجية للمجموعتين $S \cap B$ و $S \cap B^c$.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن عائلة كل المجموعات القابلة لقياس ـ ليبيغ في فضاء إقليدي تشكل حلقة من مجموعات من σ.

● **القياس الخطي:**

هو قياس على خط مستقيم أو منحنٍ.

● **قياس مجموعة:**

لتكن R عائلة من المجموعات التي تشكل حلقة (أو مثيلة حلقة) مجموعات. ويعرف **القياس الجمعي المنتهي** على R بأنه دالة مجموعات m تعين لكل مجموعة A في R العدد $m(A)$ وبحيث يكون (1) $m(\phi) = 0$، و (2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ لكل $A, B \epsilon R$, $A \cap B = \phi$. وأحياناً يشترط أن تكون قيمة قياس مجموعة لا سالباً ومن الممكن أن يأخذ القيمة $+\infty$ في هذه الحالة أو أن تكون قيمة قياس المجموعة عدداً حقيقياً (مع احتمال إضافة $+\infty$, $-\infty$) وأحياناً أخرى نسمح لأن تكون قيمة قياس المجموعة عدداً عقدياً.

أما القياس الجمعي عدياً فهو قياس جمعي منتهي m بحيث يحقق الشرط الإضافي $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1} m(S_i)$ حيث $S_i \epsilon R$ لكل i بشرط أن يكون $S_i \cap S_j$ لكل $i \neq j$ وأن يكون $S_i \epsilon R$ $\bigcup_{i=1}^{\infty}$ ونقول أن للمجموعة $S \epsilon R$ قياساً منتهياً من σ إذا كانت هناك متتالية $\{S_n\}$ من المجموعات في R بحيث يكون $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ ويكون $m(S_n) \neq \infty$ لكل n.

ويكون القياس m على R **منتهياً من σ** إذا كان لكل مجموعة في R قياس منته من σ. وجرت العادة أن يسمى القياس الجمعي عدياً على الجبرية من Rσ لمجموعات جزئية X **بالقياس أو القياس المؤشر أو القياس العقدي** على حسب ما إذا كانت قيم القياس أعداداً حقيقية لا سالبة (أو ∞+) أو أعداداً حقيقة (أو ∞+ ,∞−) أو أعداداً عقدية على الترتيب.

● **قياس الزاوية الكروية:**

هو الزاوية المستوية المشكلة من المماسات لأضلاع الزاوية الكروية عند نقاط تقاطعها.

● **حلقة قياس أو جبرية قياس:**

إذا كان هناك قياس معرف على حلقة من σ من مجموعات جزئية للفضاء X فإن هذه المجموعات القابلة للقياس تشكل **حلقة قياس** إذا عرفنا A=B إذا كان قياس الفرق المتناظر $A \nabla B = (A-B) \cup (B-A)$ مساوياً للصفر. وبعبارة أخرى فإن حلقة القياس هي خارج حلقة للحلقة من σ مقياس مثالية المجموعات صفرية القياس.

وتكون حلقة القياس جبرية قياس إذا كانت هناك مجموعة قابلة للقياس تحتوي على كل المجموعات القابلة للقياس (وفي هذه الحالة فهي جبرية بولية). ويمكن أن نعرف **مقاسا** d على مجموعة العناصر منتهية القياس T في حلقة قياس بحيث يكون $d(A,B) = \mu(A \nabla B)$، حيث μ يدل على القياس المستخدم على عناصر T.

● القياس صفر:

نقول إن للمجموعة قياساً صفرياً إذا كان لها قياس مساوٍ للصفر. وإذا اعتبرنا قياس ليبيغ على المجموعات الجزئية من فضاء إقليدي بعديته n فإن للمجموعة A قياساً صفرياً إذا وفقط إذا كان لكل عدد موجب ϵ توجد مجموعة منتهية أو لا منتهية عدياً من الفترات (المفتوحة أو المغلقة) I بحيث تكون كل نقطة $x \epsilon A$ محتواة في واحدة على الأقل من الفترات I وأن يكون مجموع قياسات الفترات I أقل من ϵ.

ونقول إن الخاصية متحققة أينما كان تقريباً إذا كانت متحققة لكل النقاط فيما عدا مجموعة من النقاط مقاسها صفرا. فمثلاً تكون الدالة f مستمرة أينما كان تقريباً إذا كانت مجموعة النقاط التي لا تكون عندها الدالة f مستمرة مجموعة قياسها صفر.

● قياس احتمال:

انظر احتمال ــ دالة الاحتمال.

● جداء القياس:

ليكن m_1 و m_2 قياسين معرفين على الحلقتين من σ لمجموعات جزئية من الفضاءين X و Ý على التوالي وليكن x×Y الجداء الديكارتي للفضاءين X و Y.

يعرف جداء القياس $m_1 \otimes m_2$ بأنه القياس المعرف على الحلقة من σ المولدة بواسطة المستطيلات A × B من X × Y بحيث تكون كل من A و B قابلتين للقياس ويكون: $m_1 \otimes m_2 (A \times B) = m_1(A) \cdot m_2(B)$

● القياس المؤشر:

انظر أعلى ــ قياس مجموعة.

قياس منطقي SYLLOGISM

هي قضية منطقية تتضمن ثلاث افتراضات تسمى المقدمة الرياضية الكبيرة والمقدمة الرياضية الصغيرة والنتيجة. وتكون النتيجة بالضرورة صحيحة إذا كانت المقدمتان المنطقيتان صحيحتين. مثلاً «أحمد يرغب في دراسة

الرياضيات أو التاريخ» و«أحمد لا يرغب في دراسة الرياضيات» و«أحمد يرغب في دراسة التاريخ».

والقياس المنطقي الافتراضي: يتكون من ثلاث اقتضاءات مترابطة تكتب بشكل (p,q,r) وتنص:

إذا كان p يقتضي q وكان q يقتضي r فإن p يقتضي r. ويكتب هذا بشكل:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

أما القياس المنطقي المطلق: فيربط اقتضاءات بسورات شمولية.

مثال: إذا كانت القضايا:

(1) لكل رباعي أضلاع T إذا كان T مربعاً فإن T يكون مستطيلاً.

(2) لكل رباعي أضلاع T إذا كان T مستطيلاً فإن T مستطيلاً فإن T يكون متوازي أضلاع.

قضايا صحيحة، فإن القضية «لكل رباعي أضلاع T إذا كان T مربعاً فإن T يكون متوازي أضلاع» صحيحة أيضاً.

انظر **اقتضاء**.

قيس MEASUREMENT

القيس هو عملية القياس، وجمعها «أقيسة».

● **أوسط زمرة أقيسة**:

انظر **أوسط**.

قيمة VALUE

● **خط القيمة لدالة مثلثية**:

هو القطعة المستقيمة التي يساوي طولها القيمة المطلقة لدالة مثلثية معينة. واعتيادياً تؤخذ على أنها القطعة المستقيمة التي يساوي طولها صورة الكسر في تعريف الدالة المثلثية. ويؤخذ مخرج الكسر على أنه واحد.

● **قيمة تخمينية:**

قيمة تحدد لشيء معين لأغراض الضريبة أو غير ذلك.

● **قيمة حالية:**

هو المبلغ اللازم استثماره بفائدة معينة ليتراكم إلى مبلغ معين بعد مدة معينة. والقيمة الحالية P لمبلغ معين A_t يستحق الدفع بعد استثماره لمدة t من الفترات الاستثمارية بفائدة بسيطة i في الفترة هي: $P = A_t(1 + ti)^{-1}, t = 1,2,3,...$. أما إذا كان الاستثمار بفائدة مركبة فإن $P = A_t(1 + i)^{-t}, t = 1,2,3,...$. أما القيمة الحالية P **لدفعة سنوية اعتيادية** دفعتها الدورية R فتدفع في آخر كل فترة ولمدة t من الفترات. $P = \frac{R}{i}[1 - (1 + i)^{-t}]$ كما أن القيمة الحالية P **لدفعة سنوية مستحقة** دفعتها الدورية R تدفع في بداية كل فترة ولمدة t من الفترات فهي:

$$P = \frac{R}{i} = [1 + i - (1 + i)^{-t + 1}]$$

● **قيمة الدالة:**

أي عنصر من عناصر مجال الدالة.

● **قيمة رئيسية لدالة مثلثية معاكسة:**

انظر **مثلثي** ــ دالة مثلثية معاكسة.

● **قيمة عبارة:**

قيمة النتيجة النهائية التي نحصل عليها إذا أنجزنا كل العمليات المطلوبة في العبارة. مثلاً العدد 4 هو قيمة $\sqrt{16}$ و $\frac{a^2}{2}$ هو قيمة $\int_0^a xdx$.

● **قيمة عددية:** نفس قيمة مطلقة.

● **قيمة متراكمة لدفعة سنوية:** انظر متراكم.

● **قيمة مسموح بها:** انظر مسموح به.

● **قيمة مطلقة:**

انظر **مطلق** ــ القيمة المطلقة لعدد حقيقي أو عقدي؛ وانظر **متجه** ــ القيمة المطلقة لمتجه.

● **قيمة المنزلة العشرية:**

هي القيمة التي تعطى لرقم معين بالاستناد إلى المكان الذي يشغله نسبة إلى الأرقام الأخرى في عدد معين. مثال: في العدد 523.4 الرقم 4 يرمز إلى $\frac{4}{10}$ من الوحدات والرقم 3 يرمز إلى 3 والرقم 2 يرمز إلى 20 وحدة والرقم 5 يرمز إلى 500 وحدة.

● **مبرهنات القيمة الوسطى:**

انظر وسط.

قيمة تخمينية **ASSESSED VALUE**

وهي قيمة تعطى للأملاك وذلك لغرض فرض الضرائب.

قيمة حالية **PRESENT VALUE**

انظر قيمة.

قيمة ذاتية **EIGENVALUE**

لنفرض أن T تحويل خطي على فضاء المتجهات V. تعرف **القيمة الذاتية** للتحويل T على أنها العدد λ الذي يحقق $T(x) = \lambda x$ لمتجه غير صفري x ينتمي إلى V. ويسمى x في هذه الحالة **المتجه الذاتي**. وبالنسبة لمصفوفة A_n فإننا نقول ان العدد λ **قيمة ذاتية** للمصفوفة إذا وجد متجه غير صفري $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ بحيث يكون $Ax = \lambda x$. ونشير إلى أننا اعتبرنا x مصفوفة عمودية وعملية الضرب هي عملية ضرب المصفوفات.

أما بالنسبة **للمعادلة التكاملية المتجانسة** $\lambda y(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt$ فإن λ يسمى قيمة ذاتية إذا وجد حل غير صفري $y(x)$ لهذه المعادلة. وفي هذه الحالة يسمى الحل $y(x)$ بـ **الدالة الذاتية**.

مثال: ليكن $K(x,t) = xt,\ y(x) = x$ فإن

$$\int_a^b K(x,t)y(t)dt = \int_a^b xt^2dt = \tfrac{1}{3}x(b^3 - a^3)$$

وبالتالي فإن القيمة الذاتية هي : $\lambda = (b^3 - a^3) \frac{1}{3}$

و x هي الدالة الذاتية المقابلة.

انظر هلبرت ـ نظرية هلبرت شميث للمعادلات التكاملية ذات النوى المتناظرة.

قيمة صغرى MINIMUM

انظر قيمة عظمى.

- **تباين أصغري لمقدر غير متحيز:**

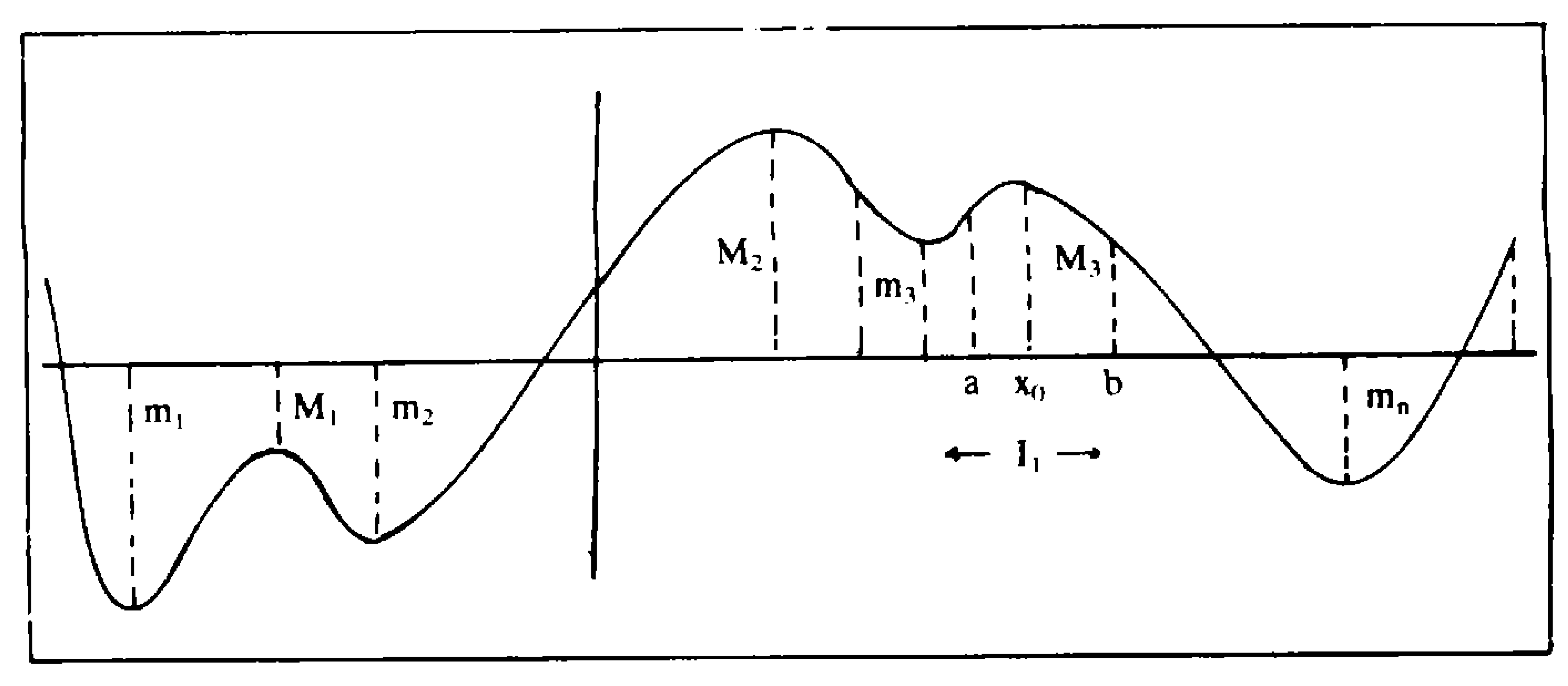
انظر غير متحيز ـ مقدّر غير متحيز.

قيمة عظمى MAXIMUM

- **القيمة العظمى (الصغرى): max(min)**

لدالة في متغير حقيقي واحد هي قيمة m للدالة f(x) عند النقطة x_0 بحيث يكون $f(x_0) \geq f(x)$ $\quad f(x_0) \leq f(x)$

من أجل جميع قيم x في فترة ما $I_1 = [a,b]$ تكون فيها الدالة f(x) معرفة وتكون $x_0 \in I_1$ وهذه القيمة تسمى عادة القيمة العظمى (الصغرى) **النسبية** أي بالنسبة للفترة I_1 فإذا كان للدالة قيم عظمى (صغرى) نسبية أخرى في فترات من فترات تعريفه فإن أكبر (أصغر) قيمة من هذه القيم العظمى (الصغرى) تسمى **القيمة العظمى (الصغرى) المطلقة**. كما يبين الشكل



أن M_3 هي قيمة عظمى نسبية في الفترة [a,b] بينما m_3 هي قيمة صغرى نسبية في الفترة [d,a]، ويبين الشكل أن M_2 هي قيمة عظمى مطلقة بينما m_1 هي قيمة صغرى مطلقة في فترة التعريف الكلية للدالة.

وتجدر الإشارة إلى أن القيمة العظمى النسبية تسمى **قيمة عظمى محلية**، كما تسمى القيمة العظمى المطلقة بـ **القيمة العظمى الشاملة**، وكذلك الأمر بالنسبة للقيمة الصغرى. ويكون للدالة $f(x)$ القابلة للاشتقاق قيمة عظمى في النقطة $x = c$ إذا كان $f''(c) < 0, f'(c) = 0$ وقيمة صغرى إذا كان $f'(c) = 0$ بينما $f''(c) > 0$ أما إذا كان $f''(c) = 0$ فقد تكون النقطة c نقطة انعطاف.

مثال: لدينا $y = x^3$، $y = x^4$ مع أن المشتق الثاني ينعدم من أجل هاتين الدالتين مع المشتق الأول وذلك عند $x = 0$، فإن (0,0) هي نقطة انعطاف للدالة الأولى، بينما تكون هذه النقطة موافقة للقيمة الصغرى للدالة الثانية. ولكي نميز عادة بين هاتين الحالتين ينبغي أن ندرس إشارة المشتق على جانبي النقطة التي نريد تحديد وضعها. أو دراسة قيم الدالة على جانبي النقطة. ويكون للدالة التحليلية قيمة عظمى (صغرى) إذا كان المشتق الأول مساوياً للصفر. وكان أول مشتق غير مساو للصفر سالباً (موجباً) عند النقطة ومرتبته زوجية.

- **قيمة عظمى لدالة ذات عدة متغيرات:**

نقول بأن للدالة $F(x_1,x_2,...,x_n)$ ذات المتغيرات المستقلة $x_1,x_2,...,x_n$ قيمة عظمى (صغرى) في النقطة $P(a_1,a_2,...,a_n)$ إذا كان الفرق $F(a_1,a_2,...,a_n) - F(x_1,x_2,...,x_n)$ غير سالب (غير موجب) في جوار صغير بقدر كاف للنقطة p. إذا كانت المشتقات الجزئية للدالة F موجودة في جوار P فإن الشرط اللازم ليكون للدالة F قيم عظمى أو صغرى هو أن يكون $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,2,...,n)$ عند النقطة P. ولإيجاد القيم العظمى (الصغرى) للدالة F في الحالة التي تكون فيها عمد (ج عمدة) الدالة أي المتغيرات $x_1,x_2,...,x_n$ غير مستقلة نستخدم طريقة خاصة تسمى طريقة لاغرانج.

انظر **لاغرانج** ـ طريقة ضوارب لاغرانج، وانظر **سرجي** ـ نقطة سرجية.

- **قيمة عظمى لدالة في متغيرين:**

هذه الدالة تمثل في الحالة العامة سطحاً. وتعرف القيمة العظمى لها بأنها تلك القيمة $f(a,b)$ التي تأخذها الدالة عند نقطة (a,b) تنتمي إلى مجال تعريف الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون $f(x,y) \leq f(a,b)$ من أجل جميع النقط (x,y) المنتمية إلى منطقة تكون فيها الدالة معرفة، ويتم تعريف القيمة الصغرى بطريقة مشابهة.

أما إذا كان $\triangle(a,b) = 0$ فإن الاختبار المبين أعلاه يفشل في الكشف عن القيمة العظمى أو الصغرى. ونشير هنا إلى أن تعريف القيمة العظمى (الصغرى) النسبية والمطلقة لدالة ذات متغيرين يتم بنفس الأسلوب المتبع للدوال ذات المتغير الواحد.

- **مبدأ القيمة العظمى:** انظر مبدأ.
- **مبدأ كوران للقيمة العظمى ـ صغرى:** انظر كوران.
- **مبرهنة القيمة العظمى:**

إذا كانت f دالة حقيقية القيمة معرفة على مجال D بحيث D مجموعة متراصة فإنه توجد نقطة x في D بحيث تأخذ عندها الدالة قيمتها العظمى. وبشكل خاص فإن D تكون فترة مغلقة مثلاً أو قرصاً (القرص هو الدائرة مع جميع النقط الواقعة داخلها).

- **مبرهنة القيمة الصغرى:**

تصاغ على غرار مبرهنة القيمة العظمى بعد استبدال $-f$ بـ f.

- **مقدّر جوازية القيمة العظمى:** انظر جوازية.

- **قيمة مطلقة لعدد عقدي** **MODULUS OF A COMPLEX NUMBER**

هي الطول العددي للمتجه الممثل لعدد عقدي $z = x + iy$ أي العدد $\sqrt{x^2 + y^2}$ ونرمز له عادة بالشكل $|z|$. فإذا كان العدد العقدي مكتوباً بالشكل القطبي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $r \geq 0$ فإن القيمة المطلقة لهذا العدد هي r.

مثال: القيمة المطلقة للعدد $z = 2 + 3i$ هي $\sqrt{13}$ كما أن القيمة المطلقة للعدد $2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ هي 2. وتحقق القيمة المطلقة للأعداد العقدية الخواص:

(1) $|wz| = |w|\,|z|$.

(2) $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$ $z \neq 0$

(3) $|w + z| \leq |w| + |z|$.

(4) $|z\,e^{i\theta}| = |z|$.

حيث w و z عددان عقديان.

قيمة مطلقة لعدد عقدي — MODULUS OF A COMPLEX NUMBER

هي طول المتجه الممثل للعدد العقدي z، وهكذا فإن القيمة المطلقة للعدد العقدي $z = a + ib$ هي $\sqrt{a^2 + b^2}$

ونكتب $|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

فإذا كان العدد العقدي z مكتوباً بالشكل

$z = r(\text{cas}\ \theta + i\sin\theta)$ حيث $r \geq 0$

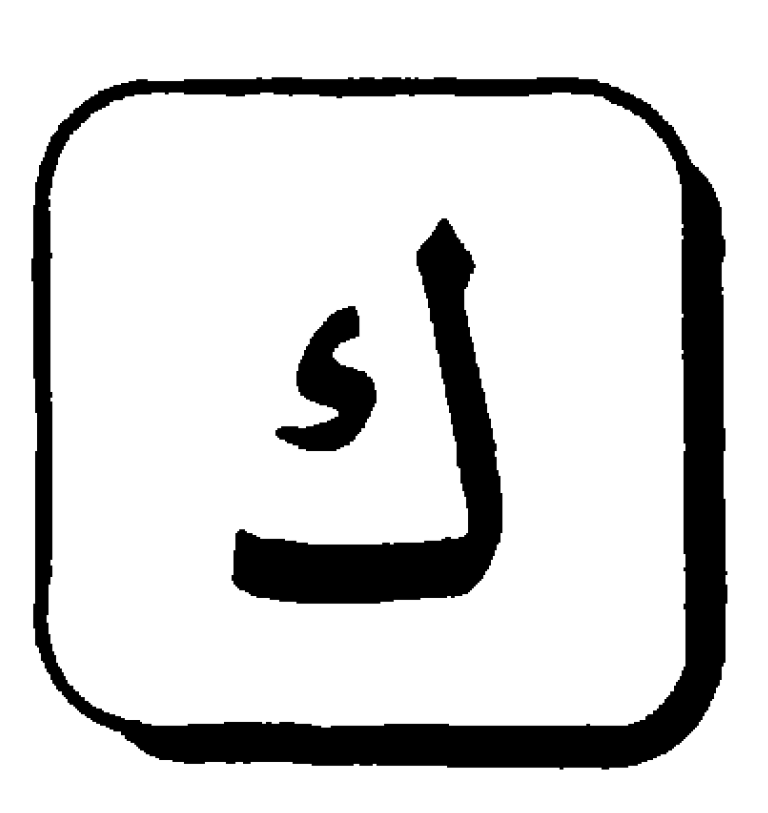
فإن $|z| = r$.

مثال: إذا كان $z_1 = 3 + 4i$، $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ فإن $|z_1| = 5$ و $|z_2| = 2$ ويمكن أن نبرهن بسهولة أن

$$|wz| = |w|\,|z|$$

$$|w + z| \leq |w| + |z|$$





كأس **CUP**

وهي الرمز U الذي يشير إلى اتحاد المجموعات.
انظر **اتحاد ـ اتحاد المجموعات**.

كاپّا **KAPPA**

هو الحرف اليوناني κ, K

● **منحنى كاپا:**

هو بيان المعادلة الديكارتية $x^4 + x^2y^2 = a^2y^2$. ولهذا المنحنى مستقيمان مقاربان هما $x = \pm a$ كما أنه متناظر بالنسبة لمحوري الفصول والتراتيب ونقطة الأصل، وله قرنة مضاعفة في نقطة الأصل.

وقد سمي هذا المنحنى كاپا لتشابهه مع الحرف اليوناني K.

كارثيودوري، كونستانتيني

CARATHEODORY, CONSTANTIN (1873-1950)

عالم ألماني اشتغل بالتحليل وخاصة التحليل العقدي وحسبان التغيرات.

● **قياس كاراثيودوري:**

انظر **قياس**.

● مبرهنة كاراثيودوري:

إذا كانت S مجموعة جزئية في فضاء بعديته n فإن كل نقطة في مولد S المحدب هي توافق محدب لعدد n + 1 (أو أقل) من نقاط S.

انظر المبرهنات المتعلقة بهذه تحت هلي، رادون نشتاينيتز.

CARAN, ELIE JOSEPH (1869-1951) — كارتان، ايلي جوزيف

عالم فرنسي اشتغل بالجبر ونظرية الزمر، الهندسة التفاضلية، النسبية، تصنيف جبريات لي وزمر لي ونظرية الاستقرار. وهو أول من أدخل الأشكال التفاضلية الخارجية والغزّالات.

CARTAN, HENRI PAUL (1904-) — كارتان، هنري بول

عالم فرنسي اشتغل بالتحليل والجبر والطوبولوجيا، وهو ابن العالم الكبير إيلي كارتان. عرف بإنجازاته في حقول الطوبولوجيا الجبرية، نظرية الدوال التحليلية بمتغير واحد أو أكثر، نظرية الجرز ونظرية الكمون.

CARDANO, GIROLAMO (1501-1576) — كاردانو، جيرولامو

طبيب ورياضي إيطالي.

● حل المعادلة التكعيبية لكاردانو:

هو حل المعادلة التكعيبية بشكلها المختزل $x^3 + ax + b = 0$

(انظر مختزل ـ تكعيبي مختزل) وذلك بواسطة التعويض $x = u + v$

وعندئذ فإن $x = u + v$ هو جذر للمعادلة إذا كان $u^3 + v^3 = -b$ و $uv = \frac{-a}{3}$

أو إذا كان u^3 جذراً للمعادلة التالية (ي الدرجة الثانية في u^3):

$$[(u^3)^2 + b(u^3) - \frac{a^3}{27} = 0, uv = \frac{-a}{3}]$$

إذا كان u_1 جذراً تكعيبياً للكمية $\frac{1}{2}(-b+\sqrt{b^2 - 4a^3/27})$ وكان v_1 مساوياً للكمية $-{}^1/_3 a/u_1$ فإن الجذور الثلاثة للمعادلة التكعيبية المختزلة هي:

$$z_1 = u_1 + v_1 \quad , \quad z_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1 \quad , \quad z_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1$$

حيث أن $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}$ هو الجذر التكعيبي للواحدة.

وهذا مكافىء للصيغة $x = [-\frac{1}{2}b + \sqrt{R}]^{\frac{1}{3}} + [-\frac{1}{2}b - \sqrt{R}]^{\frac{1}{3}}$ حيث $R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$ ويتم اختيار الجذور التكعيبية بحيث يكون حاصل ضربها $-\frac{1}{3}a$.

يكون العدد R سالباً إذا وفقط إذا كانت الجذور الثلاثة للمعادلة التكعيبية حقيقية ومختلفة وتسمى هذهالدالة **غير قابلة للاختزال** لأن الصيغ في هذه الحالة تحتوي على الجذر التكعيبي لأعداد عقدية. لقد أتم تارتاغليا هذا الحل العام وعرضه على كاردانو الذي أقسم على التكتم على الأمر لكنه عاد ونشر هذا الحل مرجعاً الفضل إلى تارتاغليا.

كاسيني، جان دومينيك — CASSINI, JEAN DOMINQUE (1625-1712)

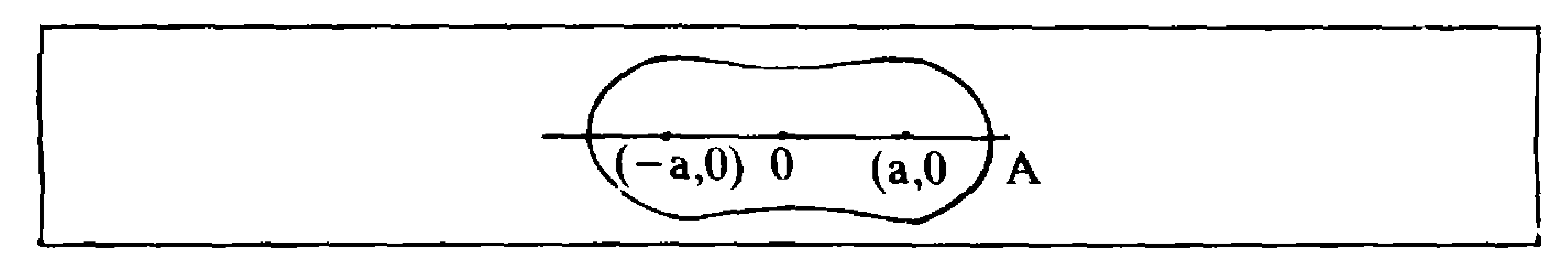
عالم فرنسي اشتغل بالفلك والجغرافيا والهندسة.

- **بيضويات كاسيني:**

المحل الهندسي لرأس مثلث يتحرك بحيث يبقى حاصل ضرب الضلعين المجاورين لهذا الرأس ثابتاً k^2 ويكون الضلع المقابل ثابتاً. إذا كان k^2 يساوي ربع الضلع الثابت فإن المنحنى يسمى **ذا العروتين** إذا كان طول الضلع الثابت يساوي 2a فإن المعادلة الديكارتية تأخذ الشكل

$$[(x + a)^2 + y^2][(x - a)^2 + y^2] = k^4$$

إذا كان k^2 أصغر من a^2 فإن المنحنى يتألف من بيضوين مختلفين وإذا كان k^2 أكبر من a^2 فإنه يتألف من بيضوي واحد. أما إذا كان $K^2 = a^2$ فإن المنحنى يصبح ذا العروتين، والشكل يوضح الحالة التي يكون فيها $k^2 > a^2$.



● **شرط كاف**: انظر شرط.

● **إحصاءة كافية**: انظر إحصاءة.

كافالييري، فرانسيسكو بانافينتورا

CAVALIERI, FRANCESCO BONAVENTURA (1598-1647)

رياضي وفيزيائي إيطالي. طوّر طريقة الاستنفاذ التي بدأها ارخميدس متوقعاً بذلك قيام حسبان التكامل.

● **مبرهنة كافالييري**:

إذا كان لمجسمين ارتفاعان متساويان وإذا كانت كل المقاطع المستوية الموازية لقاعدتيهما والمأخوذة على مسافات متساوية من القاعدتين هي أيضاً متساوية فإن حجمي المجسمين متساويان.

كاكيا، سويش KAKEYA, SOICHI (1886-1947)

عالم ياباني في التحليل والهندسة.

● **مسألة كاكيا**:

هي مسألة إيجاد مجموعة S في المستوى ذات مساحة أصغرية، بحيث يمكن لقطعة مستقيمة طولها واحد أن تتحرك بشكل مستمر في S عائدة إلى وضعها الأصلي على أن تنطبق نهايتها على بدايتها عندما كانت في الوضع الأصلي.

وللأسف إنه لا يوجد حل لهذه المسألة لأنه يوجد دوماً مجموعة S ذات مساحة أقل من ε من أجل أي عدد موجب ε . ولذلك فإن S يمكن أن تكون مجموعة بسيطة الاتصال محتواة في دائرة نصف قطرها 1.

كامل PERFECT

● **عدد كامل:**

انظر عدد.

● **قوة كاملة:**

هي عدد أو كثير حدود يساوي عدداً آخر أو كثير حدود مرفوع إلى القوة n.

مثال: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ هو قوة كاملة لأنه يساوي $(x+1)^3$.

● **مربع كامل:**

هو الكمية (عدد، كثير حدود. . .) التي تساوي مربع كمية أخرى وهكذا فإن $a^2 + 2ab + b^2$ هو مربع كامل لأنه يساوي $(a + b)^2$.

● **مكعب كامل:**

هو الكمية (عدد، كثير حدود، . . .) التي تساوي مكعب كمية أخرى مثل $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

● **مجموعة كاملة:**

هي مجموعة النقط (أو مجموعة في فضاء مقياسي) التي تتطابق مع **مجموعتها المشتقة**. أي هي المجموعة التي تكون مغلقة وكثيفة في نفسها.

كامل الاعتدال PERFECTLY NORMAL

ليكن X فضاء طوبولوجياً معتدلاً. نقول إن X **كامل الاعتدال** إذا كانت كل مجموعة مغلقة (في X) G_σ.

وكل فضاء كامل الاعتدال يكون **معتدلاً تماماً**.

انظر **معتدل تماماً**.

والفضاء الترتيبي $[0,\Omega]$ يعطينا مثالاً على فضاء معتدل تماماً ولكنه غيركامل الاعتدال حيث Ω أول عدد **ترتيبي غير قابل للعدد**.

ويولد طوبولجيا الفضاء الترتيبي من المجموعات التي على الشكل

$$\{x \mid x < \beta\} \quad \{x \mid x > \alpha\}$$

كامن

● جذر كامن لمصفوفة:

انظر قيمة ذاتية ــ قيمة ذاتية لمصفوفة.

كانتور، جورج فرديناند لودفيغ فيليب

CANTOR, GEORG FERDINANS LUDWIG PHILIPP (1845-1918)

عالم ألماني ولد في روسيا واشتغل بنظرية المجموعات، وكانت أفكاره آنذاك عن المجموعات اللامنتهية أفكاراً ثورية خلقت الكثير من الجدل.

● مجموعة كانتور:

لنأخذ الفترة المغلقة $I = [0,1]$ ونثلثها عند $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ثم نحذف الفترة المفتوحة الوسطى فنحصل على $T_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ ثم نقوم بنفس العملية وذلك على كل من $[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$ فنحصل على $T_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

وإذا استمرينا بنفس الطريقة نحصل على متتالية متناقصة من المجموعات

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots$$

ومجموعة كانتور T هي تقاطع مجموعات تلك المتتالية. أي $T = \cap \{T_i, i \in N\}$

وينتمي أي عدد إلى T إذا وفقط إذا كان تمثيله في النظام العددي الثلاثي يأخذ الشكل $0.d_1d_2...$ حيث d_n تكون إما 0 وإما 2. مجموعة كانتور مجموعة كاملة غير كثيفة وكل نقاطها نقاط حدودية. وتسمى هذه المجموعة أيضاً **بمجموعة كانتور الثلاثية**.

كاي **CHI**

هو الحرف الإغريقي χ الذي يقابل الحرف الانكليزي x.

● توزيع كاي:

هو التوزيع الاحتمالي الذي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(y) = 2^{-\frac{n}{2}+1} [\Gamma(n/2)]^{-1} y^{n-1} \exp[-y^2/2]; \qquad 0<y<\infty$$

حيث $n = 1,2,3...$ ثابت اختياري، و Γ هي دالة غاما. إن العزم اللامركزي $E(Y^r)$ من رتبة r لتوزيع كاي هو:

$$E(Y^r) = 2^{r/2}\,\Gamma\,((n+)/2)\ /\ \Gamma\,(n/2)$$

حيث $r = 1,2,3,...$. وبذلك يكون تباين هذا التوزيع مساوياً إلى:

$$n - 2\,[\Gamma\,((n+1)/2)\ /\ \Gamma(n/2)]^2$$

● **توزيع مربع كاي:**

يكتب بشكل توزيع χ^2. وهو توزيع المتغير العشوائي X الذي يعرف بدالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x) = 2^{-n/2}\,[\Gamma(n/2)]^{-1}\,x^{(n/2)-1}\exp\,[-\,x/2];\qquad 0<x<\infty$$

وحيث $n = 1,2,3,...$ ثابت اختياري يسمى درجة حرية التوزيع. وإذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع مربع كاي فإن المتغير العشوائي $Y = \sqrt{x}$ يتبع توزيع كاي. إن الدالة المولدةلعزوم توزيع مربع كاي هي:

$$M(t) = (1-2t)^{-n/2},\ t < {}^1/_2$$

وإن الدالة المميزة هي $\phi(t) = (1-2it)^{-n/2}$ حيث $i = \sqrt{-1}$ والعزم اللامركزي من رتبة r هو:

$$E(X^r) = 2^r\Gamma(r+n/2)\ /\ \Gamma\,(n/2)$$

ومنه ينتج أن n هو وسط التوزيع وأن 2n هو تباين التوزيع، ويتمتع توزيع مربع كاي بخاصية التكاثر، فإذا كانت X_1 و X_2 و X_k متغيرات عشوائية مستقلة بالتبادل تتبع توزيعات مربع كاي بدرجات حرية $r_1, r_2, r_3, ..., r_k$ على التوالي، فإن المجموع $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية $r = \sum_{i=1}^{k} k_i$. ويلعب توزيع مربع كاي دوراً مهمًا في توزيعات المعاينة وفي نظرية الاستدلال الإحصائي (انظر اختبار مربع كاي). فمن المعلوم في نظرية توزيعات المعاينة أنه إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بوسط μ وتباين σ^2 فإن $Z^2 = [(X-\mu)/\sigma]^2$ يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية 1. وإذا كانت $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ متغيرات عشوائية مستقلة بالتبادل وتتبع التوزيع الطبيعي

المعياري، فإن $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية تساوي n.
ويترتب على ذلك نتيجة مهمة هي أن المتغير العشوائي $(n-1)S^2/\sigma^2$ يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية تساوي $(n-1)$ حيث $S^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y)^2/(n-1)$، هو تباين العينة العشوائية $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

● **توزيع مربع كاي اللامركزي:**

إذا كانت $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ متغيرات عشوائية مستقلة وتتبع التوزيع المعياري الطبيعي، وإذا كانت $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ ثوابت فإن توزيع $X = \sum_{i=1}^{n} (Z_i + \mu_i)^2$ يعتمد على n وعلى $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$ فقط، ويسمى بتوزيع مربع كاي اللامركزي حيث تكون دالة كثافته $g(X;n,\lambda)$ مزيجاً من دوال كثافة توزيع مربع كاي (المركزي) موزنة بدوال احتمال بواسون بوسيط $(\lambda/2)$، وكما يلي:

$$g(x;n,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda/2)^k e^{-\lambda/2}}{k!} \right] . f(x;n+2k)$$

حيث $f(x;n+2k)$ هي دالة الكثافة لتوزيع مربع كاي بـ $(n+2k)$ من درجات الحرية ونرمز لهذا التوزيع بـ $(\chi^2(n,\lambda))$ ويسمى الثابت λ وسيط اللامركزية ويسمى n بدرجات الحرية لتوزيع مربع كاي اللامركزي. أما الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع اللامركزي، فهي:

$$M(t) = (1-2t)^{-n/2} \exp[\lambda t/(1-2t)], \; t < 1/2$$

والدالة المميزة هي:

$$\phi(t) = (1-2it)^{-n/2} \exp[i\lambda t/(1-2it)$$

ويساوى العزم اللامركزي من رتبة r:

$$E(X^r) = 2^r \, \Gamma(r+n/2) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} (\lambda/2)^k / \Gamma(k+n/2)$$

ويكون وسط التوزيع $E(X) = n + \lambda$ ويتمتع توزيع مربع كاي اللامركزي بخاصية التكاثر أيضاً، فإذا كانت $X_1, X_2, \ldots X_k$ متغيرات عشوائية

مستقلة وتتبع توزيعات مربع كاي اللامركزية $\chi^2(n_1, \lambda_1), \ldots, \chi^2(n_n, \lambda_n)$ فإن المتغير $\sum_{i=1}^{k} \chi_i^2$ يتبع توزيع مربع كاي اللامركزي $\chi^2(\sum_{i=1}^{k} n_i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i)$.

● **اختبار مربع كاي:**

واحد من عدة اختبارات لفروض إحصائية مختلفة والصفة العامة لهذه الاختبارات هي تصنيف عناصر العينة العشوائية حسب صفة أو صفتين (كمية أو غير كمية) كل صفة تتألف من عدد من الفئات ثم يتم تسجيل عدد عناصر العينة (التكرار المشاهد) التي تقع في كل فئة وحسب كل صفة. وبذلك تتبع العينة توزيع متعدد الحدود باحتمالات نظرية للفئات. وتتعلق فروض العدم لجميع اختبارات مربع كاي باحتمالات فئات العينة حيث يفرض أن هذه الاحتمالات تحقق شروطاً معينة. أما الصيغة العامة لإحصاءة اختبار مربع **كاي، فهي** $x^2 = \Sigma \frac{(0 - E)^2}{E}$، يمثل 0 التكرار المشاهد لكل فئة بينما يمثل E التكرار المتوقع في كل فئة، عندما يكون فرض العدم صحيحاً. وتعتمد E غالباً على وسيطات مجهولة يجب تقديرها من العينة. ويمتد المجموع Σ على كل الفئات. إن التوزيع النهائي (عندما يؤول n إلى ∞) لإحصاءة الاختبار x^2 عندما يكون فرض العدم صحيحاً هو توزيع مربع كاي بدرجات حرية معينة صيغتها العامة: درجات الحرية = عدد حدود x^2 - عدد القيود على التكرار المشاهدة - عدد الوسيطات التي تم تقديرها من العينة. ونرفض فرض العدم إذا زادت قيمة عن القيمة الحرجة المستخرجة من جداول مربع كاي.

انظر **اختبار مربع كاي لحسن التوفيق وللاستقلال وللتجانس.**

● **اختبار مربع كاي لحسن التوفيق:**

لتكن $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ عينة عشوائية معينة. إن فرض العدم H_0 المطلوب اختياره هو أن هذه العينة مسحوبة من مجتمع إحصائي توزيعه الاحتمالي $f_0(X; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t)$ معلوماً فيما عدا وسطاء مجهولة $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t)$. وإذا لم تكن هناك وسطاء مجهولة تكون f_0 معلومة تماماً. يتطلب اختبار مربع كاي لحسن التوفيق تصنيف عناصر العينة إلى فئات (كمية أو غير كمية) $A_1, A_2, \ldots, A_r$ (إذا لم تكن كذلك أصلاً). ونسجل عدد التكرارات المشاهدة n_j في كل فئة A_j. ليكن $P_j = Pr(A_j)$ احتمال وقوع عنصر في الفئة

A_j $(j = 1,2,\ldots, r)$. ومن الواضح أن المتغيرات العشوائية $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ تتبع التوزيع المتعدد والحدود $(n!/n_1!n_2!\ldots n_r!)p_1^{n_1} p_2^{n_2}\ldots p_r^{n_r}$ وبالقيد $n = \sum_{j=1}^{r} n_j$ ثابت يمثل حجم العينة. وعندما يكون فرض العدم صحيحاً تعتمد قيم p_j على f_0 وبالتالي تعتمد على $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t)$ لذلك نكتب فرض العدم بالشكل:

$$H_0: p_j = p_{j0} (\theta_1, \ldots, \theta_t); j = 1,2, \ldots, r$$

وبالقيد $\sum_{j=1}^{t} p_{j0} = 1$، وحسب H_0 تكون $np_{j0}(\theta_1,\ldots,\theta_t)$ التكرارات المتوقعة (E) في الفئة A_j. أما n_j فهي التكرارات المشاهدة (O) في A_j. وبذلك تكون إحصاءة اختبار مربع كاي $\Sigma(0 - E)^2/E$ بالشكل التالي:

$$X^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{[n_j - n p_{j0} (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t)]^2}{n p_{j0} (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t)}$$

ويتم تقدير الوسطاء المجهولة $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_2)$ بالكميات التي تجعل X^2 أصغر ما يمكن. وتسمى هذه الكميات **بمقدرات مربع كاي الأصغر**. من أجل ذلك نقوم باشتقاق x^2 بالنسبة إلى كل من $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_t$ ونساوي المشتقات بالصفر لنحصل على المعادلات:

$$\frac{\partial X^2}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^{r} \left[\frac{n_j - n p_{j0}}{p_{j0}} + \frac{(n_j - p_{j0})^2}{2np_{j0}} \right] \frac{\partial p_{j0}}{\partial \theta_i} = 0$$
$$i = 1,2,3,\ldots,t$$

ولكن من الصعب حل هذه المعادلات في كثير من الحالات. فنضطر لاتباع **طريقة مربع كاي الأصغر المعدلة** في التقدير التي تهمل الحد الثاني داخل القوس الكبير (حيث يكون تأثيره ضئيلاً عندما يكون n كبيراً) في صيغة $\partial X^2/\partial\theta_i$، فتصبح المعادلات:

$$\sum_{j=1}^{r} \left[\frac{n_j - np_{j0}}{p_{j0}} \right] \frac{\partial p_{j0}}{\partial \theta_i} = 0, i = 1,2,\ldots,t$$

انظر كاي ـ طريقة مربع كاي الأصغر، وتوزيع X^2 النهائي (عندما $(n\rightarrow\infty)$ هو توزيع مربع كاي بدرجات حرية تساوي $(r - 1 - t)$ وذلك لأن عدد حدود Σ هو r وعدد القيود على التكرارات المشاهدة هو واحد (القيد

$n = \sum_j n_j$ ثابت) ولأن عدد الوسطاء المقدرة هو t أما إذا لم تكن هناك وسطاء مجهولة فإن درجة الحرية هي $(r - 1)$.

وكمثال على اختبار مربع كاي ليكن فرض العدم H_0 هو أن العينة العشوائية $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$، حيث قيم X_i أعداد صحيحة غير سالبة، مسحوبة من توزيع بواسون $f_0(X;\lambda) = \lambda^x e^{-\lambda}/X!$ أما الوسيط فهو مجهول. نصنف المشاهدات $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ حسب قيمها في r من الفئات $A_1, A_2, \ldots, A_r$ حيث نضع كل القيم المتساوية في فئة واحدة ونسجل التكرارات المشاهدة $n_j(j = 1,2,\ldots,r)$. وقد نحتاج إلى دمج بعض القيم المتجاورة التي تحتوي على تكرارات ضئيلة وهذا يحصل بصورة خاصة بالنسبة للقيم الصغيرة وبالنسبة للقيم الكبيرة. وليكن n_1 تكرار الفئة A_1 التي تحتوي على جميع قيم $X \leq 1$ و n_2 تكرار الفئة A_2 التي تحتوي على جميع قيم $X = 2$،

....

و n_j تكرار الفئة A_r التي تحتوي على جميع قيم $X = j$

....

و n_r تكرار الفئة A_r التي تحتوي على جميع قيم $X \geq r$ وليكن $p_j = P_r(E_j)$ احتمال وقوع عنصر في الفئة A_j، وبذلك تكتب فرض العدم H_0 بالشكل:

$$H_0: p_j = p_{j0}(\lambda); \; j = 1,2,\ldots,r; \; \Sigma p_j = 1$$

حيث $p_{10}(\lambda) = \sum_{x=0}^{1} \lambda^x e^{-\lambda}/X!$ و $p_{j0}(\lambda) = \lambda^j e^{-\lambda}/j!$ من أجل $j = 2, \ldots, r-1$ و $P_{r0}(\lambda) = \sum_{x=r}^{\infty} \lambda^x e^{-\lambda}/X!$. وبذلك تكون إحصاءة اختبار مربع كاي بالشكل:

$$X^2 = \sum_{J=1}^{r} \frac{(n_j - np_{j0}(\lambda))^2}{np_{j0}(\lambda)}$$

ونقدر الوسيط المجهول λ بطريقة مربع كاي الأصغر المعدلة التي تعطينا التقدير $\hat{\lambda} = \overline{X}$ (وهذا أيضاً تقدير الجوازية العظمى) حيث $\overline{X} = \Sigma X_i n$. وبتعويض $\hat{\lambda}$ بدل λ في الدالة $\lambda^x e^{-\lambda}/X!$ نستطيع حساب p_{j0} لأجل $j = 1,\ldots,r$. وتكون درجات الحرية في هذه الحالة $r - 1 - 1 = r - 2$. ونرفض H_0 إذا زادت قيمة X^2 عن القيمة الجدولية لتوزيع مربع كاي. أما إذا كان λ معلوماً فإن درجة الحرية هي $r - 1$.

● **اختبار مربع كاي للاستقلال:**

هو أحد تطبيقات اختبار مربع كاي لحسن التوفيق. نصنف عناصر عينة عشوائية حجمها n حسب صفتين (كمية أو غير كمية) A و B. بحيث تحتوي الصفة الأولى على r من الفئات $A_1, A_2, \ldots, A_r$ وتحتوي الصفة الثانية على C من الفئات $B_1, B_2, \ldots, B_c$. وليكن p_{ij} احتمال وقوع عنصر من عناصر العينة في التقاطع $A_i \cap B_j$، أي أن:

$$(i = 1,2,\ldots,r;\ j = 1,2,\ldots,c)\quad p_{ij} = P_r\ (A_i \cap B_j)$$

وليكن $p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{c} p_{ij}$ الاحتمال الهامشي $p_r(A_i)$ لوقوع عنصر في الفئة A_i و $p_{.j} = \sum_{j=1}^{r} p_{ij}$ الاحتمال الهامشي $p_r(B_j)$ لوقوع عنصر في الفئة B_j. وليكن n_{ij} و $n_{i\bullet}$ و $n_{\bullet j}$ التكرار المشاهد في الفئات $A_i \cap B_j$ و A_i و B_j على التوالي حيث $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$ و $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$ غير ثابتين. ويمكن ترتيب عناصر العينة كما في الجدول التالي الذي يسمى بجدول التوافق.

جدول التوافق

A \ B	B_1	B_2	....	B_c	المجموع
A_1	n_{11}	n_{12}		n_{1c}	$n_{1\bullet}$
A_2	n_{21}	n_{22}		n_{2c}	$n_{2\bullet}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_r	n_{r1}	n_{r2}		n_{rc}	$n_{r\bullet}$
المجموع	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$		$n_{\bullet c}$	n

إن فرض العدم المراد اختباره هو استقلالية الصفتين A و B عن بعض ومن تعريف الاستقلال الإحصائي نكتب فرض العدم بالشكل:

$$H_0: p_{ij} = P_{i\bullet}\, p_{\bullet j},\ i = 1,2,\ldots,r;\ j = 1,2,\ldots,c$$

وحيث $\sum_{i=1}^{r} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{c} p_{\bullet j} = 1$ وطبقاً لفرض العدم فإن التكرار المتوقع E في الفئة $A_i \cap B_j$ هو $np_{i\bullet}\, p_{\bullet j}$ وتكون إحصاءة اختبار مربع كاي بشكل $X^2 = \Sigma(0 - E)^2/E$:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - np_{i\bullet}\, p_{\bullet j})^2}{np_{i\bullet}\, p_{\bullet j}}$$

وتشكل $p_{i.}\ (i = 1,2,\ldots, r)$ و $p_{.j}\ (j = 1,\ldots,c)$ مجاهيل عددها $r + c - 2$ ويجب تقديرها من العينة. وباستخدام **طريقة مربع كاي الأصغر المعدلة** نقدر هذه المجاهيل بالقيم التي تجعل X^2 أصغر ما يمكن. فنشتق X^2 بالنسبة إلى p_i وإلى $p_{\bullet j}$ ونساوي المشتقات بالصفر. ونحصل على التقديرات $\hat{p}_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}$ و $\hat{p}_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n}$ التي نعوضها في صيغة X^2 لنحصل على **إحصاءة اختبار الاستقلالية في جداول التوافق**:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}/n)^2}{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}/n} \equiv n \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{n^2_{ij}}{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}} - 1 \right)$$

ويتبع X^2 (عندما $n \to \infty$) توزيع مربع كاي بدرجة حرية:

$$rc - 1 - (r + c - 2) \equiv (r - 1)\,(c - 1)$$

ونرفض H_0 بمستوى معنوية α إذا كان $X^2 > X^2_{1-\alpha}$ حيث يمثل $X^2_{1-\alpha}$ المئين $100(1-\alpha)$ لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية $(r - 1)\,(c - 1)$. ومن المرغوب فيه حساب مؤشر لمدى تبعية(عدم استقلالية) الصفتين في جدول الاقتران. ومن هذه المؤشرات هو **التوافق الوسطي المربعي** ϕ^2 الذي يعرف بالشكل:

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} (p_{ij} - p_{i\bullet}\, p_{\bullet j})^2 / p_{i\bullet}\, p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{p^2_{ij}}{p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}} - 1$$

وإذا جعلنا $m = \text{minimum}(r,c)$ فإن $\phi^2/(m-1)$ مقياس معياري لتبعية حيث $0 \le \phi^2/(m - 1) \le 1$. ومن العينة نقدر σ^2 بواسطة $\phi^2 = \frac{X^2}{n}$ ونقدر مقياس التبعية المعياري $\phi^2/(m-1)$ بواسطة $X^2/(n(m-1)$ ويسمى $\hat{\phi} = \sqrt{x^2/n}$ **معامل فاي**.

● **اختبار مربع كاي للتجانس:**

ليكن هناك r من العينات العشوائية ذات الحجوم $n_{1.}, n_{2.}, \ldots, n_{r.}$ وليكن هناك c من الفئات $B_1, B_2, \ldots, B_r$ التي نصنف إليها عناصر كل عينة. وليكن $(i = 1,2,\ldots,r;\ j = 1,2,\ldots,c)n_{ij}$ عدد عناصر (التكرار المشاهد) العينة i الواقعة في الفئة B_j ويجب أن تحقق التكرارات n_{ij} عددrمن القيود هي $n = \sum_{j=1}^{c} n_{ij}$ ثوابت لأجل $i = 1,2,\ldots,r$. وهذا يختلف عن الحالة في اختبار مربع كاي للاستقلال حيث تكون $n_{i.}$ متغيرات عشوائية. ليكن p_{ij} احتمال وقوع عنصر من العينة i في الفئة B_j. وبذلك تتبع العينة i توزيعاً متعدد الحدود:

$$(n_{i.}!/n_{i1}!\, n_{i2}! \cdots n_{ic}!)\ p_{i1}^{n_{i1}}\ p_{i2}^{n_{i2}} \cdots p_{ic}^{n_{ic}}$$

إن فرض العدم H_0 المطلوب اختباره هو أن هذه العينات مسحوبة من نفس المجتمع، أي تتبع نفس التوزيع متعدد الحدود بالاحتمالات $p_1, p_2, \ldots p_c$ في فئاته المختلفة:

$$H_0\colon p_{1j} = p_{2j} = \ldots = p_{rj} = p_j;\ j = 1, 2, \ldots, c$$

وحيث $\sum_{j=1}^{c} p_j = 1$ وطبقاً لفرض العدم H_0 يكون $n_{i\bullet}p_j$ التكرار المتوقع E في الفئة B_j من العينة i وبذلك تكون إحصاءة اختبار مربع كاي $\Sigma(0 - E)^2/E$ بشكل:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - n_{i\bullet}p_j)^2}{n_i p_j}$$

وهناك $(c-1)$ من المجاهيل $p_1, \ldots, p_{c-1}$ التي نقدرها بالكميات التي تجعل X^2 أصغر ما يمكن حسب طريقة مربع كاي الأصغر المعدلة. إذ نشتق X^2 بالنسبة إلى P_j1 ونساوي المشتقات إلى الصفر. فنحصل على المقدرات $\hat{p}_j = n_{\bullet j/n}$ لأجل $j = 1,2,\ldots,c$ وبذلك تكون **إحصاء اختبار مربع كاي للتجانس:**

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(n_{ij} - n_{i.}\, n_{.j}/n)^2}{ni_\bullet\, n_\bullet{}_j/n} \equiv \sum_{i=i}^{r} \sum_{j=1}^{c} \left(\frac{n^2_{ij}}{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}\right) - 1$$

وهو شكلاً نفس إحصاءة مربع كاي للاستقلال. ويتبع في توزيعه النهائي توزيع مربع كاي بدرجة حرية:

$$rc - r - (c - 1) = (r - 1)(c - 1)$$

ونرفض H_0 بمستوى معنوية α إذا كان $X^2 < X^2_{1-\alpha}$ حيث $X^2_{1-\alpha}$ هو المئين $100(1-\alpha)$ لتوزيع مربع كاي.

● **طريقة مربع كاي الأصغر:**

طريقة إحصائية لتقدير الوسيطات المجهولة التي تعتمد عليها إحصاءة اختبار مربع كاي ضمناً أو صراحة.

انظر **كاي** ــ اختبار مربع كاي لحسن التوفيق.

● **طريقة مربع كاي الأصغر المعدلة:**

انظر **كاي** ــ اختبار مربع كاي لحسن التوفيق.

● **مقدرات مربع كاي الأصغر:**

انظر **كاي** ــ اختبار مربع كاي لحسن التوفيق.

كاي — KEI

● **دالة Kei:**

انظر **Ber** بير ــ دالة **Ber**.

كايلي، آرثر — CAYLEY, ARTHUR (1821-1895)

عالم إنجليزي اشتغل بالجبر والهندسة والتحليل. وقد أسهم بشكل خاص في نظرية اللامتغيرات الجبرية وفي الهندسة العالية البعدية.

انظر **سيلفستر**.

● **جبرية كايلي:**

هي مجموعة الرموز من النمط A+Be حيث أن كلاً من A,B مرباع ويكون الجمع والضرب معرفين كما يلي:

$$(A + Be) + (C + De) = (A + C) + (B + D)e$$
$$(A + Be)(C + De) = (AC - B\bar{D}) + (AD + B\bar{C})e$$

حيث أن $\bar{C}$ هو مرافق المرباع C وكذلك $\bar{D}$ هو مرافق المرباع D تحقق جبرية كايلي كل شروط جبرية القسمة المحتوية على عنصر وحدة باستثناء أن الضرب في جبرية كايلي غير تجميعي. إذا نظرنا إلى جبرية كايلي كفضاء متجهات على حقل الأعداد الحقيقية نجد أن بعديتها 8 وأن المجموعة:

$$\{1, i, j, k, e, ie, je, ke\}$$

تشكل أساساً لها. ونستنتج من تعريف الضرب أن:

$$e^2 = -1, ie = -ei, je = -ej, ke = -ek$$

وأن: $(ij)e = ke, \ i(je) = -ke$ ويسمى كل عنصر في هذه الجبرية **بعدد كايلي**.

انظر **فرومبينيوس** – **مبرهنة فروبينيوس**.

● **مبرهنة كايلي:**

كل زمرة تكون متماثلة مع زمرة تحويلات. وبشكل خاص، تكون كل زمرة G متماثلة مع زمرة تبديلات على المجموعة G.

● **مبرهنة كايلي – هاميلتون:**

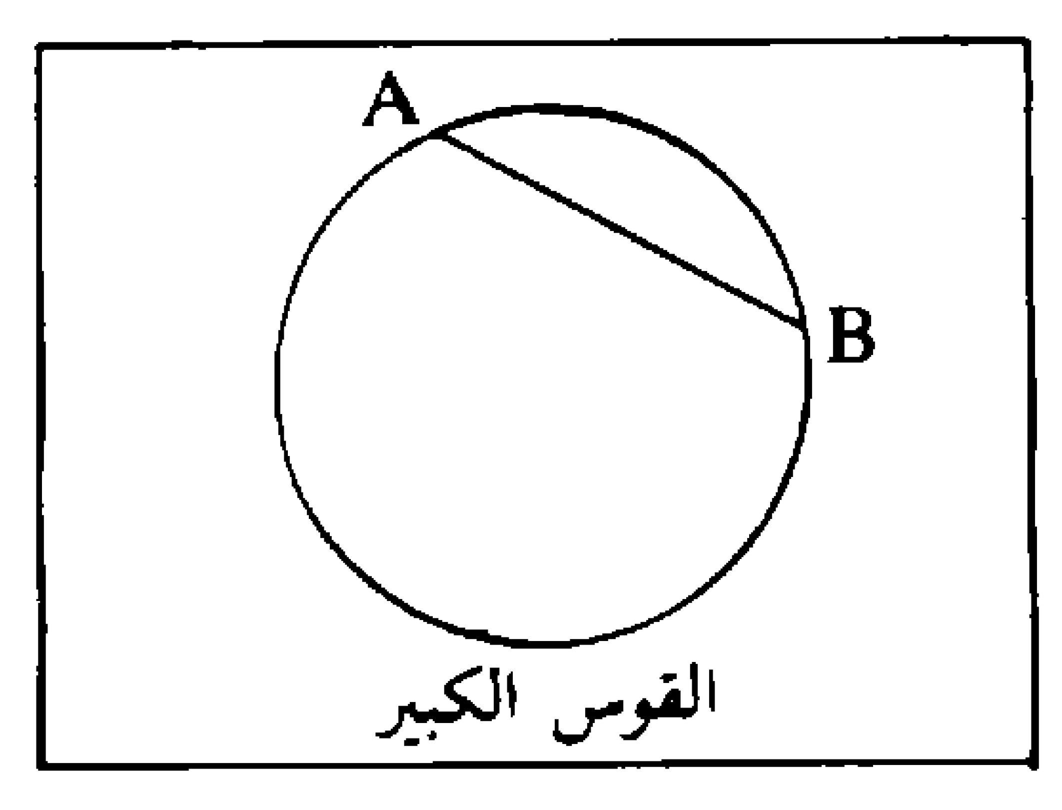
انظر **مصفوفة**.

MAJOR كبير

● **قطعة دائرية كبيرة أو صغيرة:** انظر **قطعة**.

● **قوس كبير:**

إذا قطعنادائرة بوتر واصل بين نقطتين منها فإننانقسم الدائرة إلى قوسين أحدهما قوس صغير والآخر كبير كما في الشكل. انظر **قطاع دائرة**.



القوس الكبير

● **محور كبير:**

انظر **قطع ناقص**؛ انظر **مجسم قطع ناقص**.

في الكبير. أنظر صغير: في الصغير.

● قانون الأعداد الكبيرة (إحصاء):

لتكن $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ متتالية من متغيرات عشوائية و $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $(n = 1,2,...)$ متتالية من المجاميع الجزئية. تبحث **قوانين الأعداد الكبيرة** بالشروط اللازمة والكافية لتحقق التقارب $\frac{S_n - E(S_n)}{n} \rightarrow 0$ في الاحتمال أو قرب المؤكد عندما $n \rightarrow \infty$. ويمكن كتابة هذا التقارب بشكل $\bar{X}_n - E(\bar{X}_n) \rightarrow 0$ حيث $\bar{X}_n = {}^1/_n S_n$. إذا كان التقارب في الاحتمال أي

$\lim_{n\rightarrow\infty} P(|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| > \epsilon) = 0$ لكل $E > 0$ نقول إن المتتالية $\{S_n\}$ تتبع **قانون الأعداد الكبيرة الضعيف**.

أما إذا كان التقارب قرب المؤكد أي

$$\lim_{m\rightarrow\infty} P(|\frac{S_n - E(S_n)}{n}| > E, n \geq m) = 0 \quad \text{لكل} \quad E > 0$$

فنقول أن $\{S_n\}$ تتبع **قانون الأعداد الكبيرة القوى**. وهناك قوانين أعداد كبيرة أكثر عموماً تبحث في الشروط اللازمة والكافية لتحقق التقارب $\frac{S_n - a_n}{b_n} \rightarrow 0$ في الاحتمال أو قرب المؤكد عندما $n \rightarrow \infty$ وحيث $\{a_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية و $\{b_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة تؤول إلى اللانهاية. وفيما يلي نذكر بعض قوانين الأعداد الكبيرة.

أولاً: قوانين الأعداد الكبيرة لمتغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع:

(1) **قانون الأعداد الكبيرة الضعيف لخينتشين**: إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة التوزيع بحيث $E(X_n) = \mu < \infty$ فإن $\frac{S_n - n\mu}{n} \rightarrow 0$ في الاحتمال عندما $n \rightarrow \infty$.

(2) **قانون الأعداد الكبيرة القوى لكلمغورف**: إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة متطابقة التوزيع فإن $\frac{S_n - n\mu}{n} \to 0$ قرب المؤكد إذا وفقط إذا كان $E(X_i) = \mu < \infty$.

ثانياً: متغيرات مستقلة وغير متطابقة التوزيع:

قانون الأعداد الكبيرة القوي لكلمغورف: إذا كانت $X_1, X_2, \ldots$ متغيرات عشوائية مستقلة بحيث $E(X_i) = \mu_i < \infty$ و $E(X_i - \mu_i)^2 = \sigma_i^2 < \infty$ و $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i} < \infty$ فإن $\frac{S_n - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n} \to 0$ قرب المؤكد عندما $n \to \infty$.

ثالثاً: متغيرات عشوائية لامترابطة:

(1) **قانون الأعداد الكبيرة الضعيف لتشيبيشف**:

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots$ متغيرات عشوائية بحيث $E(X_i) = \mu_i < \infty$ و $E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) = 0$ لكل $i \neq j$ و $E(X_i - \mu_i)^2 = \sigma^2_i < \infty$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_i = 0$ فإن $\frac{S_n - \sum_{i}^{n} \mu_i}{n} \to 0$ في الاحتمال عندما $n \to \infty$.

(2) **قانون الأعداد الكبيرة القوى لكلمغورف**: إذا كانت $X_1, X_2, \ldots$ متغيرات عشوائية بحيث $E(X_i) = \mu_i < \infty$ و $E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j) = 0$ لكل $i \neq j$ و $E(X_i - \mu_i)^2 = \sigma^2_i < \infty$ و $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^2_i (\ell n_i)^2}{i^2} < \infty$ فإن $\frac{S_n - \sum_{i}^{n} \mu_i}{n} \to 0$ قرب المؤكد عندما $n \to \infty$.

إن مبرهنة برنولي (جيمس) هي حالة خاصة من قانون الأعداد الكبيرة الضعيف لخينتشين التي تنص على الآتي: إذا كان S_n عدد النجاحات في n من محاولات برنولي المستقلة حيث p هي احتمال النجاح في كل محاولة فإن $\frac{S_n - np}{n} \to 0$ في الاحتمال.

● **الكتلة:**

هي قياس نزعة الجسم لمعاكسة سرعته. ويمكن أن نعرف الكتلة حسب القانون الثاني لنيوتن على أنها النسبة بين مقادير القوى الفاعلة في جسم وبين التسارعات الناجمة عنها.

ويمكن مقارنة كتلتين m_2 و m_1 لجسمين في سرعات صغيرة بالمقارنة مع سرعة الضوء، إذا جعلنا هذين الجسمين يقومات بفعل متبادل، وعندئذ فإن

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|a_2|}{|a_1|}$$

حيث $|a_1|$ و $|a_2|$ هما كميتا التسارع للجسمين الناتجين عن الفعل المتبادل بينهما (أي التفاعل فيما بينهما). وهذا يسمح لنا بقياس كتلة أي جسيم بالنسبة لجسيم معياري نموذجي. (مثلاً الكيلوغرام المعياري).

أما في السرع العالية فإن كتلة الجسم تتعلق بسرعته بالنسبة لمراقب وفق العلاقة $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

حيث m_0 هي كتلة الجسم كما يقيسها المراقب عندما يكون الجسم ساكناً بالنسبة للمراقب. v هي سرعة الجسم بالنسبة للمراقب الذي يرى أن كتلة الجسم أصبحت m، أما c فهي سرعة الضوء في فضاء مفرغ الخلاء). ونذكر هنا أن للكتل المتساوية أوزاناً متساوية إذا كانت موضوعة في نفس المكان وخاضعة لحقل الجاذبية. وبسبب هذه الخاصية فإن الكتل يمكن أن تقارن بالوزن.

إن للكتلة هذه الأهمية الخاصة بسبب كونها كمية مصونة (محفوظة) فلا يمكن أن تخلق ولا يمكن أن تفنى بل أنها تتحول من حالة لأخرى. وهكذا فإن كتلة أي مجموعة منعزلة هي مقدار ثابت. ومن خلال نظريات الميكانيك

النسبي فإن الكتلة يمكن أن تنقلب إلى طاقة وبالعكس وفق معادلة اينشتين:

$$E = mc^2$$

حيث c هي سرعة الضوء في فضاء مفرغ (الخلاء) قبل أن نطبق قانون الانحفاظ (المصونية).

- **تفاضل (عنصر) كتلة:** انظر عنصر ـ عنصر المكاملة.
- **عزم كتلة:** انظر عزم ـ عزم كتلة.
- **مركز كتلة:** انظر مركز ـ مركز كتلة، مركز متوسط.
- **نقطة كتلية:** نفس جسيم.
- **وحدة كتلية:**

هي وحدة الكتلة المعيارية أو مضاعفاتها يتم اختيارها بشكل مناسب. ويوجد وحدات معيارية متعددة، ففي النظام السغثي (سنتيمتر ـ غرام ـ ثانية) نأخذ الكتلة الغرامية على أنها $\frac{1}{1000}$ من كتلة قالب من خليط البلاتينيوم ـ ايريديوم والمحفوظة في مكتب الأوزان والقياسات في سيغر بفرنسا.

DENSITY — كثافة

الكثافة هي الكتلة أو مقدار المادة في وحدة حجم. ونظراً لأن كتلة واحد سنتمتر مكعب من الماء في درجة حرارة 4^o مئوية هي غرام واحد فإن الكثافة في النظام المتري هي نفس الجاذبية النوعية.

انظر نوعي.

- **كثافة متتالية من الأعداد الصحيحة:**

لنفرض أن $0, a_1, a_2, \ldots$ متتالية متزايدة A من الأعداد الصحيحة. ولنعرف F(n) بأنه عدد الأعداد الصحيحة (فيما عدا الصفر) في المتتالية والتي تقل عن أو تساوي n. فإننا نلاحظ أن $0 \leq F(n)/n \leq 1$. وتعرف كثافة A بأنها الحد الأدنى الأكبر F(n)/n ويرمز لها بالرمز D(A) وتكون d(A) مساوية للصفر إذا كان

$a_1 \neq 1$ أو إذا احتوت A على عدد قليل جداً من الأعداد مثل أن تكون AA متتالية هندسية أو متتالية الأعداد الأولية أو متتالية المربعات الكاملة (0,1,4,9,16,...) أما جمع متتاليتين A و B من النوع المذكور أعلاه فيعرف بأنه متتالية جميع الأعداد مرتبة حسب قيمتها والتي تساوي مجموع عددين أحدهما من A والآخر من B. فإذا فرضنا أن A هي المتتالية ...,0,1,3,5,7,9 وأن B هي المتتالية 0,1,5,9,13,17 فإن A + B هي متتالية الأعداد الصحيحة اللاسالبة.

ويتضح أن $d(A) = \frac{1}{2}$ وأن $d(B) = \frac{1}{4}$ وأن

$$d(A) + d(B) \leq d(A + B) = 1$$

ويمكن البرهنة بصورة عامة على أنه إذا كان $d(A+B) \leq 1$ فإن

$$d(A+B) \geq d(A) + d(B)$$

كما يمكن البرهنة أيضاً على أن $d(A) = 1$ إذا وفقط إذا كانت A متتالية الأعداد الصحيحة اللاسالبة.

● **وسط الكثافة:**

هو خارج قسمة الكتلة على الحجم أي $\int_v \rho dv \div \int_v dv$

حيث ρ تمثل الكثافة و $\int_v$ يمثل التكامل مأخوذاً فوق الحجم الكلي.

● **الكثافة المقاسية:**

أنظر مقاس.

● **الكثافة السطحية للشحنة:**

هي الشحنة لوحدة مساحة. ومن المفيد أحياناً أن نتصور أن كل جسم محاط بجلد ذي سمك معين. فإذا افترضناأن الشحنة الكلية المتواجدة في جلد الجسم قد أزيحت وركزت على السطح الخارجي للجلد فإنه بالامكان استبدال الشحنة الأصلية لوحدة حجم في الجلد بالشحنة لوحدة مساحة على السطح الخارجي للجلد بدون حدوث تغيير يذكر في مقدار الشحنة الكلية في الحالتين.

ويكون التكامل على حجم للكثافة في الحالة الأولى مساوياً لمقدار التكامل على سطح الكثافة في الحالة الثانية.

● الكثافة:

هي الشحنة لوحدة حجم. إن أهم خاصية لكثافة الشحنة هو أن تكاملها مأخوذ على أي حجم معطى V يعطينا مقدار الشحنة الكلية في V.

ويمكننا تعريف الكثافة بواسطة الشحنة الكلية على أنها $\lim \frac{e_i}{v_i}$ حيث $\{v_i\}$ متتالية من مناطق كل منها داخل كرة قطرها r_i ومتمركزة في P و $\lim r_i = 0$ و e_i تمثل الشحنة الكلية في V_i وبحيث تكون نهاية المتتالية $\{\frac{e_i}{v_i}\}$ مستقلة عن متتالية المناطق $\{V_i\}$.

كثير MANY

● دالة كثيرة القيم:

انظر دالة متضاعفة القيمة.

كثير الجوانب POLYTOPE

هو كائن رياضي في فضاء من n بعداً. وهذا الكائن هو تعميم للنقطة والقطعة المستقيمة والمضلع وكثير الوجوه في الفضاءات ذات الأبعاد 3,2,1,0.

● كثير الجوانب المحدب:

في فضاء من n بعداً هو مولَّد محدب في مجموعة منتهية من النقط غير الواقعة في فَوْمُستو واحد. وهكذا فإن كثير الجوانب المحدب هو مجموعة جزئية محدودة ومحدبة ومحاطة بعدد منته من الفومستويات (ج. فومستو).

وجه كثير الجوانب المحدب K هو المجموعة الخالية أو K أو أي مجموعة F يوجد من أجلها فومستوحامل H من K بحيث $F = H \cap K$.

وجيه كثير الجوانب المحدب هو وجه فعلي غير محتوى في وجه أوسع.

هو مجسم محدود بمضلعات مستوية نسميها وجوه كثير الوجوه.

أما تقاطعات الوجوه فنسميها أحرف كثير الوجوه. كما أن النقط الناتجة عن ثلاثة حروف أو أكثر تسمى رؤوس كثير الوجوه.

ويسمى كثير الوجوه عادة بعدد وجوهه. وهكذا لدينا رباعي الوجوه (4)، سداسي الوجوه (6)، ثماني الوجوه (8)، ذو اثني عشر وجهاً (12)، عشروني الوجوه (20) حيث نشير إلى عدد الوجوه بين قوسين.

- **كثير الوجوه المحدب:**

هو كثير الوجوه الذي يقع بكامله في جهة واحدة من مستو ينطبق على أي وجه من وجوه كثير الوجوه. وبصورة أخرى فإن كثير الوجوه يكون محدباً إذا كان الشكل الناتج من قطعة بمستو مضلعاً محدباً.

- **كثير وجوه مقعر:**

هو كثير وجوه ليس محدباً. وعندئذ يوجد مستو واحد على الأقل ينطبق على أحد الوجوه ويقسم كثير الوجوه إلى جزءين يقعان في جهتين مختلفتين من المستوى.

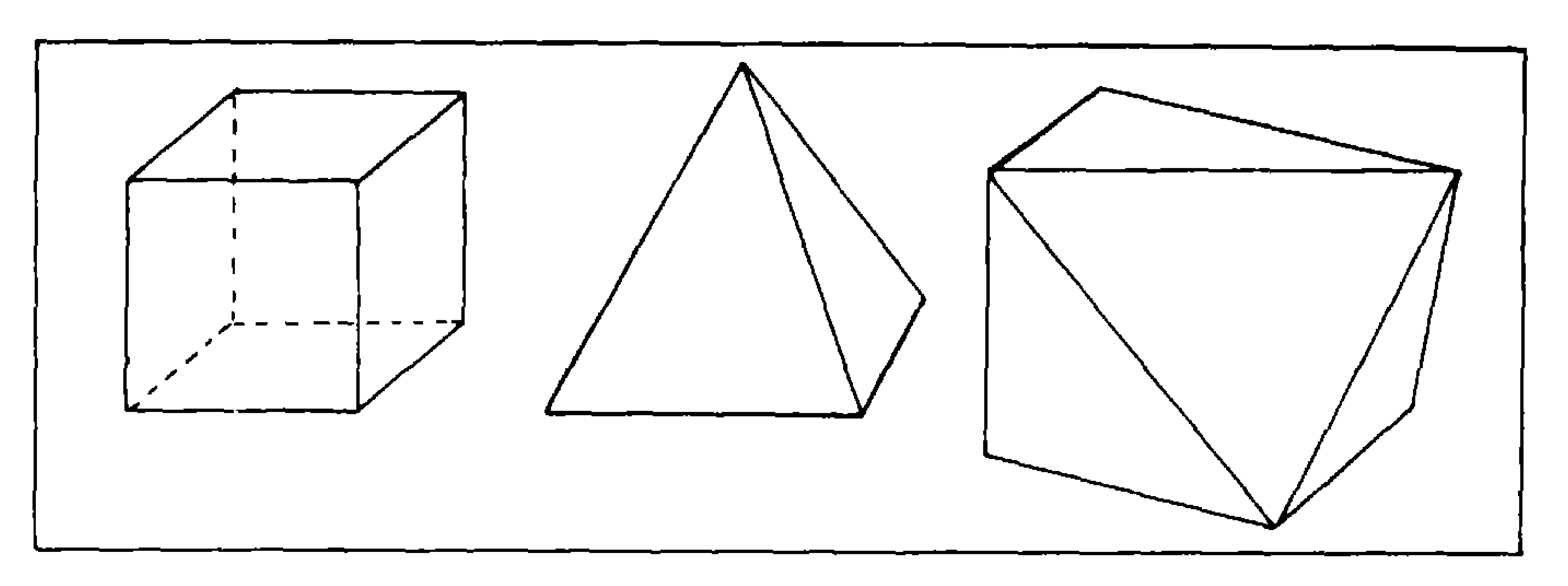
- **كثير الوجوه البسيط:**

هو كثير وجوه متكافىء طوبولوجياً مع كرة. أي هو كثير وجوه بدون ثقوب بداخله.

- **كثير الوجوه النظامي:**

هو كثير وجوه تكون وجوهه مضلعات نظامية متساوية، كما تكون زواياه الداخلية ذات الوجوه الكثيرةمتساوية.

ومن المعلوم أنه يوجد خمسة كثيرات وجوه نظامية فقط هي: الرباعي والسداسي (المكعب)، والثماني وذو الاثني عشر وجهاً والعشروني ويبينها الشكل.



مبرهنة أويلر: تنص على أنه من أجل أي كثير وجوه بسيط تتحقق العلاقة $V - E + F = 2$ حيث V عدد الرؤوس E عدد الأحرف F عدد الوجوه.

وتستخدم هذه المبرهنة عادة لبرهان أنه يوجد خمسة كثيرات وجوه نظامية فقط. **وبشكل عام** فإن كثير الوجوه يمكن أن يعتبر **كائناً متماثلاً استمرارياً** مع المجموعة المؤلفة من جميع النقط المنتمية إلى **مبسطات المعقد المبسطي**.

- **كثيرات الوجوه المحيطة والمحاطة**:

  انظر **محيط**.

- **قطر كثير الوجوه**:

  انظر **قطر**.

- **مبرهنة أويلر لكثيرات الوجوه**:

  انظر **أويلر**.

- **كثيرات الوجوه المتشابهة**:

هي كثيرات وجوه يتشابه فيها كل وجه من أحدهما مع نظيره من كثير الوجوه الآخر كما تتساوى كل زاوية ذات وجوه كثيرة من أحدهما مع نظيرتها من كثير الوجوه الآخر.

- **كثيرات الوجوه المتناظرة**:

نقول عن كثير الوجوه H بأنه متناظر مع كثير الوجوه H' إذا كان H' يتطابق مع صورة H في المرآة.

- **كثير حدود في متغير واحد:**

(ويسمى اختصاراً كثير حدود) من الدرجة n هو عبارة جبرية من الشكل

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

حيث $a_0,a_1,\dots,a_n$ هي أعداد عقدية (حقيقية أو تخيلية)، n هو عدد صحيح غير سالب. وهكذا فالثوابت هي كثيرات حدود من الدرجة 0 ما عدا الصفر نفسه.

ويكون كثير الحدود خطياً، تربيعياً، تكعيبياً أو رباعي الدرجة حسبما تكون درجة كثير الحدود 4،3،2،1 على الترتيب.

- **كثير حدود في عدة متغيرات:**

هو عبارة جبرية تتألف من مجموع عدة حدود وكل حد منها هو حاصل ضرب عدد ثابت بجميع المتغيرات المرفوعة إلى قوى غير سالبة.

- **معادلة كثير الحدود:**

هي المعادلة

$$P_n(x) \equiv x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ولهذه المعادلة n جذراً بين حقيقي وعقدي مضاعف أو بسيط.

فإذا كانت المعاملات $a_1,a_2,\dots,a_n$ حقيقية وكانت الجذور هي $x_1,x_2,\dots,x_n$ فإن العلاقات بين الجذور والمعاملات هي كما يلي:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = a_2$$

....

$$x_1x_2\dots x_n = (-1)^n a_n$$

إذا كان $\alpha + i\beta$ جذراً للمعادلة $P_n(x) = 0$ فإن $\alpha - i\,\beta$ هو جذر أيضاً.

إذا كان α جذراً للمعادلة $P_n(x) = 0$ فإن $\alpha - i\beta$ هو جذر أيضاً.

إذا كان α جـذراً للمعادلة $P_n(x) = 0$ وكان $P'_n(\alpha) = 0, P''_n(\alpha) \neq 0$ فإن α هو جذر مضاعف لمعادلة كثير الحدود، وهكذا.

- **كثير حدود لايختزل:** انظر لايختزل.
- **معادلة كثير الحدود:** انظر معادلة.
- **متباينة كثير الحدود:** انظر متباينة.
- **كثيرات حدود برنولي، تشيبيشيف، هرميت، لاغرّا، لوجاندر:** انظر الأسماء في مواقعها.
- **كثيرحدود بدائي:** انظر بدائي.
- **كثير حدود قابل للفصل:** انظر قابل للفصل.

كثيف DENSE

- **المجموعة الكثيفة:**

لنفترض أن المجموعة E هي مجموعة جزئية من الفضاء M تسمى E **كثيفة أو كثيفة في M أو كثيفة أينما كان** إذا كانت كل نقطة في M نقطة في E أو نقطة نهاية للمجموعة E أي أن M هي غلاقة E. ويمكن التعبير عن ذلك بالقول أن كل جوار في M يحتوي على نقطة في E. ويقال إن المجموعة E **كثيفة في نفسها** إذا كانت كل نقطة في E نقطة تراكم للمجموعة E أي أن كل جوار لنقطة في E يحتوي على نقطة أخرى من E. ويقال إن المجموعة E **لا كثيفة أو لاكثيفة في أي مكان** بالنسبة للفضاء M إذا كانت غلاقة E لا تحتوي على أي جوار في M أو بصورة أخرى إذا كانت متممة غلاقة E كثيفة في M.

مثال: إن كلا من مجموعتي الأعداد المنطقة والصماء كثيفة في نفسها وكثيفة كذلك في مجموعة الأعداد الحقيقية R. وهذه الحقيقة تكافيء القول بأن بين كل عددين حقيقيين (منطقين أو أصمين) توجد أعداد صماء وأعداد منطقة. أما المجموعة $S = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ فإنها كثيفة في لا مكان في R لأن غلاقة S وهي S نفسها لا تحتوي على جوار في R.

كثيفة نسبياً RELATIVELY DONSE

● المجموعة الكثيفة نسبياً:

نقول أن المجموعة D المكونة من أعداد حقيقية كثيفة نسبياً إذا كان هناك عدد حقيقي موجب T بحيث يكون

$$D \cap (t - T, t + T) \neq \phi \quad \text{لكل} \quad t \in R$$

وتستخدم هذه المجموعات في تعريف وتصنيف خواص المعاودة والدورة تقريباً.

انظر معاودة؛ ودوري تقريباً.

كر KER

دالة **Ker** ــ انظر **Ber** ــ دالة **Ber**. بر.

كرامر، غابرييل CRAMER, GABRIEL (1704-1752)

رياضي وفيزيائي سويسري.

● قاعدة كرامر:

قاعدة بسيطة لإيجاد حل جملة من n من المعادلات الخطية بـ n من المجاهيل باستخدام المعينات.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$X_j = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1,j-1}\ b_1\ a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2,j-1}\ b_2\ a_{2,j+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{n,j-1}\ b_n\ a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

حيث $D = \|a_{ij}\|$ هو معين المعاملات. وهنا يشترط $D \neq 0$، (انظر معين،

اتساق)، أي أن X_j يساوي حاصل قسمة المعين الناتج من إحلال الحدود الثابتة محل العمود في معين المعاملات على معين المعاملات.

انظر معين؛ وانظر اتساق.

CRAMER, HARALD (1893-) **كرامر، هارالد**

- **متباينة كرامر وراو:**

لتكن $f(x;\theta)$ دالة التوزيع للمتغير العشوائي (مستمر أو متقطع) حيث θ وسيط التوزيع. وليكن $T(x_1,x_2,\dots,x_n)$ مقدراً (من عينة عشوائية $x_1,x_2,\dots,x_n$) للوسيط θ. إذا تحققت شروط النظامية المذكورة أدناه فإن خطأ الوسط المربعي $E(T-\theta)^2$ للمقدر T يحقق متباينة كرامر وراو:

$$E(T-\theta)^2 \geq \frac{(2+ db/d\theta)^2}{n.E\,[\partial \ln f/\partial\,\theta]^2}$$

حيث $b = E(T) - \theta$ مقدار التحيز في المقدر T. وإذا كان T مقدراً متحيزاً للوسيط θ (أي $b = 0$) فإن متباينة كرامر وراو تأخذ الشكل التالي:

$$\mathrm{Var}\,(T) \geq \frac{1}{n.E\,[\partial \ln f/\,\partial\theta]^2}$$

حيث $\mathrm{Var}\,(T)$ هو تباين T. إن شروط النظامية هي:

(1) $f(x;\theta)$ موجبة لجميع قيم X في مجموعة S لا تعتمد على θ.

(2) فضاء الوسيط Ω فترة مفتوحة.

(3) $\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)$ موجودة لجميع قيم $\theta \in \Omega$ ولجميع قيم $X \in S$ فيما عدا مجموعة احتمالها يساوي صفراً.

(4) $$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_S \dots \int_S f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots\ dx_n = \int_S\dots\int_S \frac{\partial}{\partial\theta} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$$

وإذا كان X متقطعاً فإن علامات التكامل تستبدل بعلامات المجاميع Σ.

(5) $E[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f]^2 > 0$ لأجل جميع قيم θ.

$$\frac{\partial}{\partial\partial}\int_S \cdots \int_S Tf(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int_S\ldots\int_S \frac{\partial}{\partial\theta}T\, f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n \quad (6)$$

SPHERE كرة

الكرة هي مجموعة النقاط في الفضاء التي تقع على مسافة ثابتة من نقطة ثابتة. وتسمى النقطة الثابتة بـ **المركز** والمسافة الثابتة بـ **نصف القطر**. أما القطر فهو القطعة من كل خط مستقيم مار بالمركز والتي تنحصر بين نقطتي تقاطع هذا المستقيم مع الكرة. كما تطلق كلمة القطر أيضاً على طول هذه القطعة. حجم الكرة يساوي $\frac{4}{3}\pi r^3$ حيث أن r هو نصف القطر. أما مساحة سطح الكرة فهي $4\pi r^2$. إذا استعملنا الاحداثيات الديكارتية في الفضاء فإن معادلة الكرة التي تتخذ من النقطة (a,b,c) مركزاً لها ومن المسافة r نصف قطر هي:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

وطبيعي أن نستنتج من المعادلة أعلاه أنه لو اتخذنا من نقطة الأصل (0,0,0) مركزاً للكرة فإن المعادلة تصبح: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (انظر **مسافة ـ** مسافة بين نقطتين). أما إذا استعملنا الاحداثيات الكروية فإن معادلة الكرة تكون $\rho = r$ عندما يكون المركز عند القطب. وتطلق أحياناً كلمة **كرة مغلقة** على مجموعة النقاط (x,y,z) في الفضاء والتي تحقق العلاقة: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leqq r^2$ وتسمى النقطة (a,b,c) مركز الكرة أيضاً، أما **الكرة المفتوحة** فهي مجموعة النقاط المحققة للعلاقة: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < r^2$.

يمكن تعميم التعاريف السابقة من الفضاء الاقليدي الطبيعي ذي ثلاثة الأبعاد إلى أي فضاء اقليدي مهما تكن بعديته وذلك كما يلي: **الكرة من n** ذات المركز $(a_1,a_2,\ldots,a_{n+1})$ ونصف القطر r هي مجموعة النقاط $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ في الفضاء الاقليدي ذي البعدية n + 1 والتي تحقق $\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a_i)^2 = r^2$.

أما الكرة المغلقة فتصبح مجموعة النقاط التي تحقق

$\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a_i)^2 \leq r^2$. والكرة المفتوحة، هي مجموعة النقاط التي تحقق: $\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a_i)^2 < r^2$.

- **الكرة السماوية:**

هي السطح الكروي الذي يبدو أن النجوم تتحرك عليه.

- **وتر الكرة:**

هو قطعة مستقيمة تصل نقطتين على الكرة.

- **كرة محيطة وكرة محاطة:** انظر محيط.

- **عائلة كرات:**

انظر عائلة ـ عائلة سطوح ذات وسيط.

- **قاطع كرة:**

هو خط مستقيم يقطع الكرة في نقطتين وتسمى القطعة المحصورة بين هاتين النقطتين وتراً.

الكرخي، أبو بكر محمد الحاسب (ـ 1029):

من مشاهير رياضيي القرن الحادي عشر الميلادي. عاش في بغداد، ولقّب الكرخي بعد أن كان يلقب بالكرجي نسبة إلى كرج في تركستان، توفي في حدود (١٠٢٩ ميلادي). اشتهر ببحوثه الرياضية وتآليفه في الجبر ونظرية العدد. أثبت المبرهنات الخاصة بإيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعداد:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = (1 + 2 + \dots + n) \left(\frac{1 + 2n}{3}\right),$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

بحث الكرخي في جذور الأعداد الصماء واستعمل في ذلك دساتير مهمة مثل: $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$. ألف ثلاثة كتب مهمة هي: (1) «كتاب الفخري» تناول فيه حلول معادلات الدرجة الثانية في أشكالها المختلفة. (2) كتاب «الكافي في الحساب» الذي تناول فيه جذور الأعداد الصماء ومساحات بعض السطوح وخاصة المساحات المحتوية على جذور. (3) كتاب «البديع».

KRONECKER, LEOPOLD (1823-1891) كرونكر، ليوبولد

عالم رياضي ألماني في الجبر والنظرية الجبرية للأعداد.

● **دلتا كرونكر:**

هي الدالة δ^i_j للمتغيرين i و j والمعرفة كما يلي: $\delta^i_j = 1$ إذا كان i = j ،
$\delta^i_j = 0$ إذا كان i≠j. أما دلتا كرونكر المعممة فلها k دليل سفلي و k دليل علوي وتأخذ الشكل:

$$\delta^{i_1 i_2 \cdots i_k}_{j_1 j_2 \cdots j_k}$$

فإذا كانت جميع الأدلة العلوية مختلفة وكانت مجموعة الأعداد في الأدلة السفلية هي نفسها مجموعة الأعداد في الأدلة العلوية، فإن قيمة δ هي + 1 ، − 1، وذلك بحسب ما يكون نوع التبديل اللازم لترتيب الأدلة السفلية بنفس ترتيب الأدلة العلوية زوجياً أو فردياً. وتكون قيمة δ في جميع الأحوال الأخرى مساوية الصفر. (أنظر ابسيلون). ولا بد أن نذكر أخيراً أن كل أنواع دلتا كرونكر هي ممددات عددية.

SPHERICAL كروي

● **زاوية كروية:**

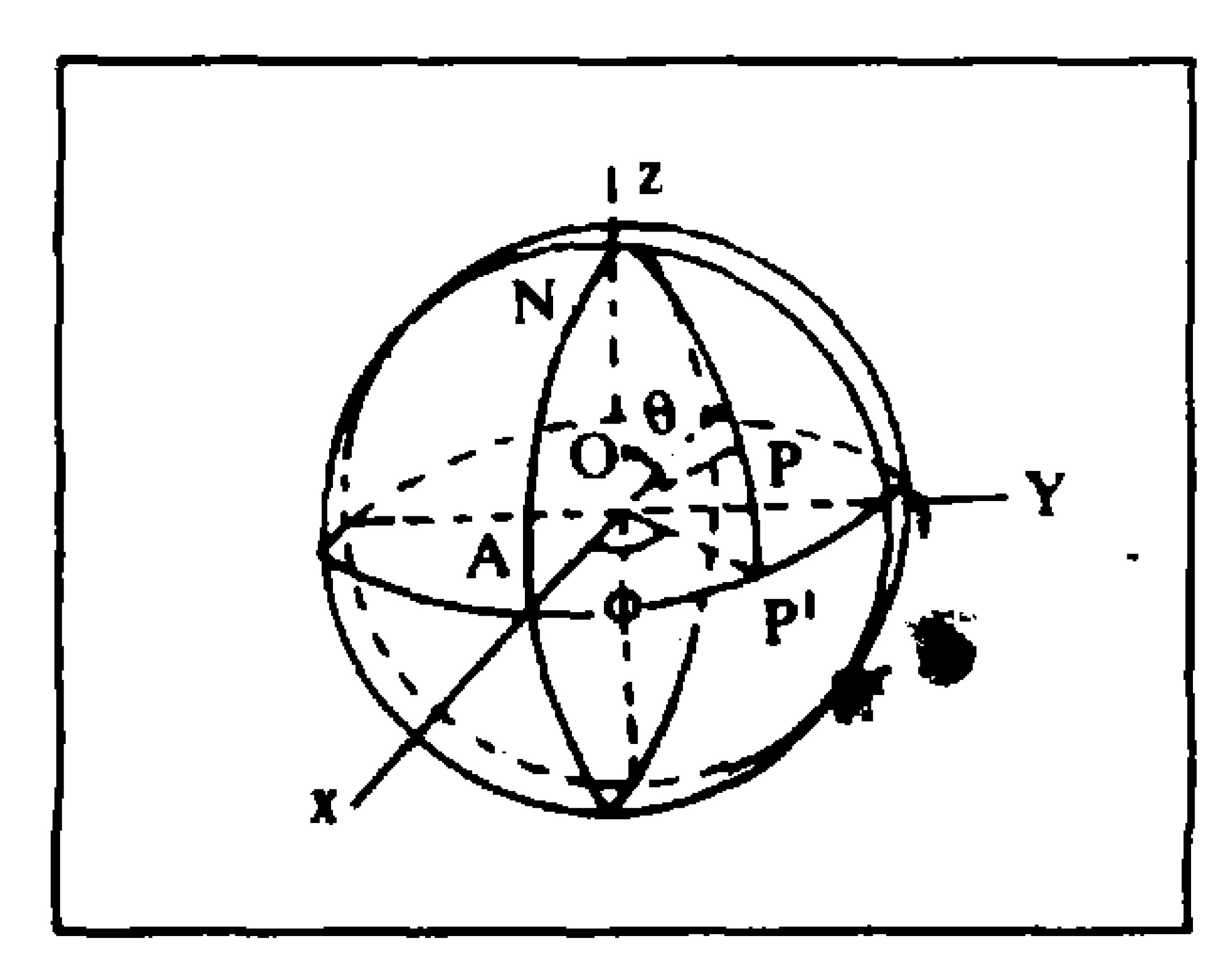
انظر زاوية ـ زاوية كروية.

● **مخروط كروي:**

انظر مخروط ـ مخروط كروي.

● **احداثيات كروية:**

هي نظام من الاحداثيات في الفضاء الاقليدي ذي ثلاثة الأبعاد..



تعين الاحداثات الكروية موضع أي نقطة P في الفضاء باستخدام ثلاث

قيم هي متجه نصف القطر وتمام العرض وخط الطول، وسنعطي فيما يلي تعريف كل من هذه القيم:

متجه نصف القطر: هو المسافة $OP = r$ بين النقطة P ونقطة ثابتة O، تسمى القطب.

تمام العرض: هو الزاوية $NOP = \theta$ المحصورة بين OP ومحور ثابت ON يسمى المحور القطبي (انظر الشكل).

خط الطول: وهو الزاوية $AOP = \phi$ بين مستو θ ومستو ثابت NOA يمر بالمحور القطبي ويسمى بمستوى خط الطول الابتدائي. متجه نصف القطر r يضع النقطة P على كرة مركزها القطب O ونصف قطرها r ثم تأتي قيم θ و φ لتحدد موقع P على تلك الكرة نأخذ الزاوية θ دائمًا بين صفر و π راديان، بينما تأخذ φ أية قيمة (نأخذ قيمة r سالبة إذا قسنا φ على P'O ممدداً). أما العلاقة بين الاحداثيات الكروية والاحداثيات الديكارتية فهي:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

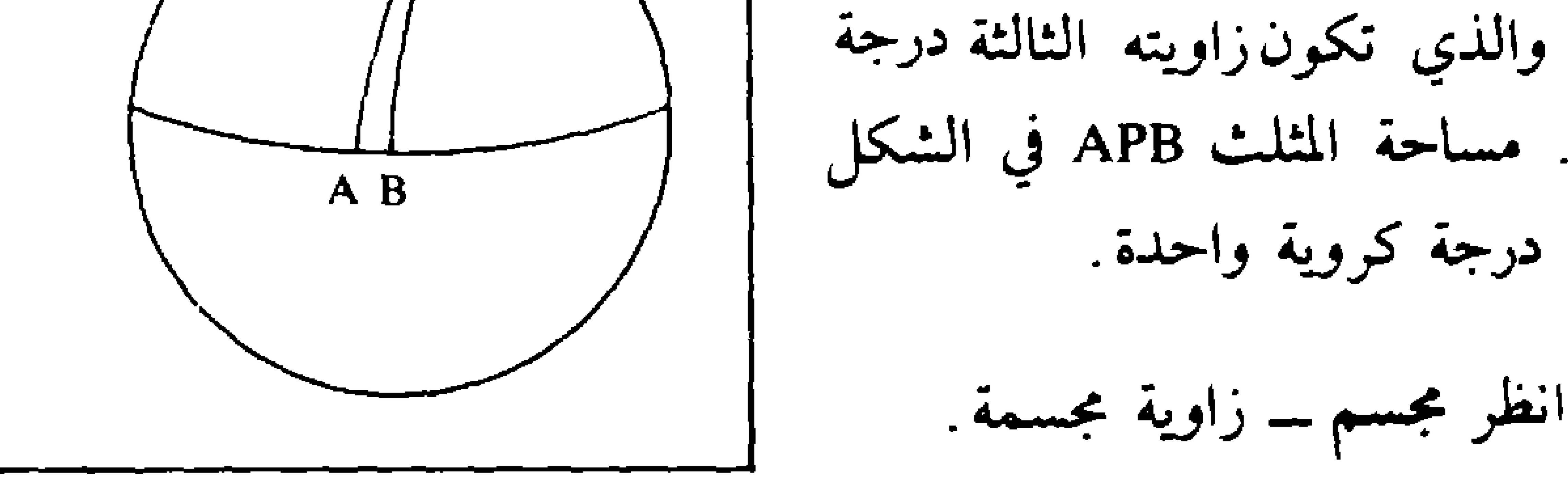
$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

ويستعمل البعض الرمز σ مكان r كما يستبدل كل من θ و φ بالأخرى. وتسمى هذه الاحداثيات أيضاً بالاحداثيات الجغرافية أو بالاحداثيات القطبية في الفضاء.

● **الدرجة الكروية**:

هي مساحة المثلث الكروي الثنائي القائمة والذي تكون زاويته الثالثة درجة واحدة. مساحة المثلث APB في الشكل تساوي درجة كروية واحدة.



انظر مجسم ــ زاوية مجسمة.

- **الفائض الكروي لمثلث كروي:**

هو مجموع زوايا هذا المثلث مطروحاً منه 180° (الجدير بالذكر أن مجموع زوايا المثلث الكروي أكبر من 180° وأصغر من 540°).

- **الفائض الكروي لمضلع كروي:**

هو مجموع زوايا المضلع الكروي ناقص $180^\circ (n - 2)$ حيث أن n هو عدد أضلاع المضلع (نذكر أيضاً أن $180^\circ (n - 2)$ هو مجموع زوايا المضلع المستوى الذي له n ضلعاً).

- **توافقي كروي:**

انظر **توافقي ـ توافقي كروي**.

- **صورة كروية (أو تمثيل كروي) للمنحنيات والسطوح:**

أولاً: للمنحنى انظر مبين. الصورة الكروية لنقطة على سطح هي طرف نصف القطر في كرة الوحدة على أن يكون نصف القطر هذا موازياً للاتجاه الموجب للناظم على السطح عند هذه النقطة. ثانياً: التمثيل الكروي (أو الصورة الكروية) لسطح هو المحل الهندسي للصور الكروية لنقاط هذا السطح. ويسمى هذا التمثيل أيضاً بالتمثيل الغاوسي للسطح.

- **مضلع كروي:**

هو جزء من سطح كروي محدود بواسطة ثلاثة أو أكثر من أقواس دوائر عظمى، ومساحة هذا المضلع تساوي $\frac{\pi r^2 E}{180}$ حيث أن r هو نصف قطر الكرة و E هو الفائض الكروي للمثلث.

- **هرم كروي:** انظر **هرم**.

- **قطاع كروي:** انظر **قطاع**.

- **قطعة كروية:** انظر **قطعة**.

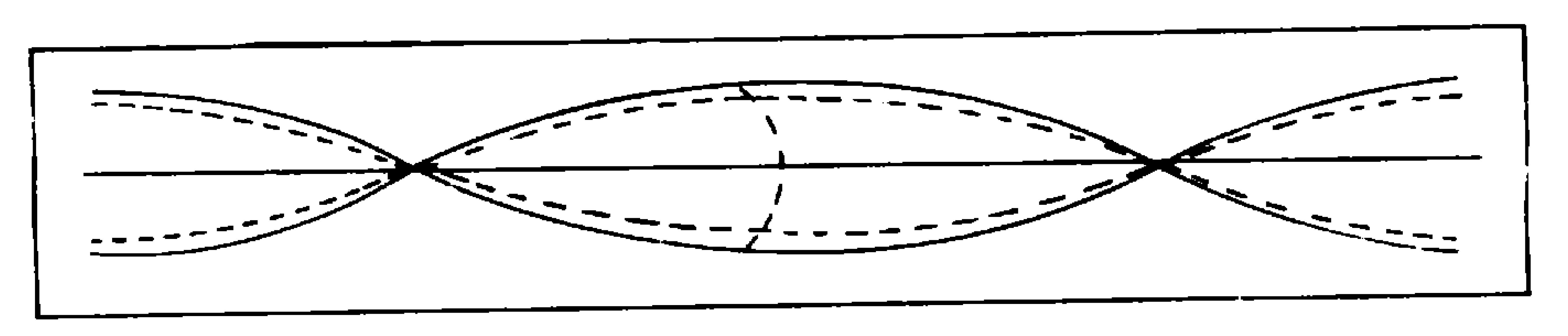
- **سطح كروي:**

هو سطح يكون تقوسه الكلي K ثابتاً وموجباً. (انظر **شبه كروي ـ سطح**

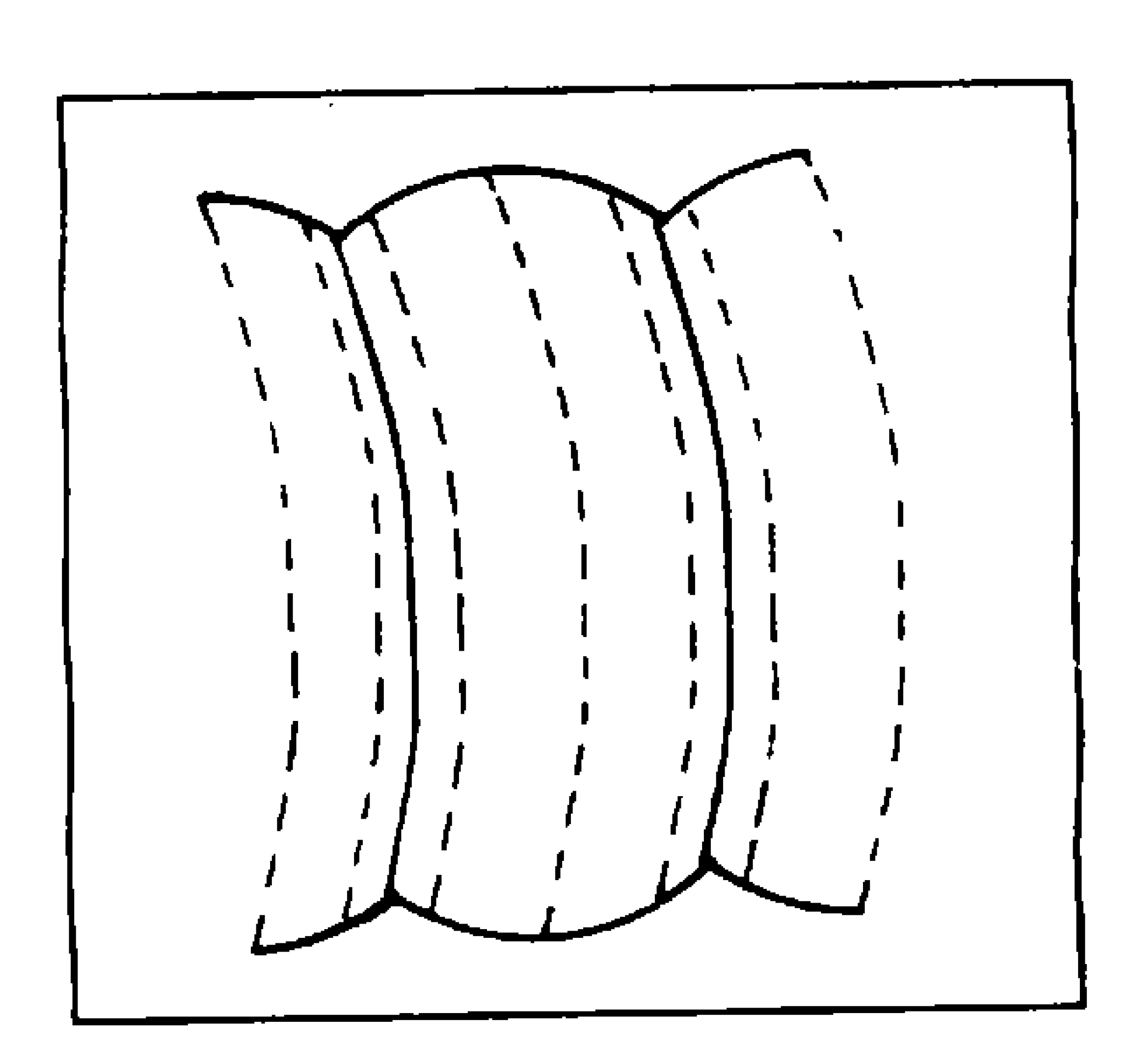
شبه كروي، وسطح ثابت التقوس، ليست كل السطوح الكروية كراتاً ولكنها متقايسة مع كرات. وبذلك يكون لكل السطوح الكروية الخواص الأصلية، نقول عن سطح كروي أنه من النمط الناقص إذا كان يمكن اختصار عنصره الخطي إلى الشكل:

$$ds^2 = du^2 + c^2\sin^2(u/a)dv^2, \; c < a$$

ويكون النظام الاحداثي جيوديزياً، إذا كان S سطح دوران كروياً من النمط الناقص فإنه يتألف من سلسلة من النطاقات المتطابقة على شكل مغزل. (انظر الشكل).



نقول عن سطح كروي أنه من **النمط الزائدي** إذا كان يمكن اختصار عنصره الخطي إلى الشكل: $ds^2 = du^2 + a^2\sin^2(u/a)dv^2 \quad c > a$



ويكون النظام الاحداثي جيوديزياً، إذا كان S سطح دوران كروياً من النمط الزائدي فإنه يتألف من سلسلة من النطاقات المتطابقة على شكل قوالب الجبن ينحصر كل منها بين متوازيات نصف قطرها أصغري (انظر الشكل).

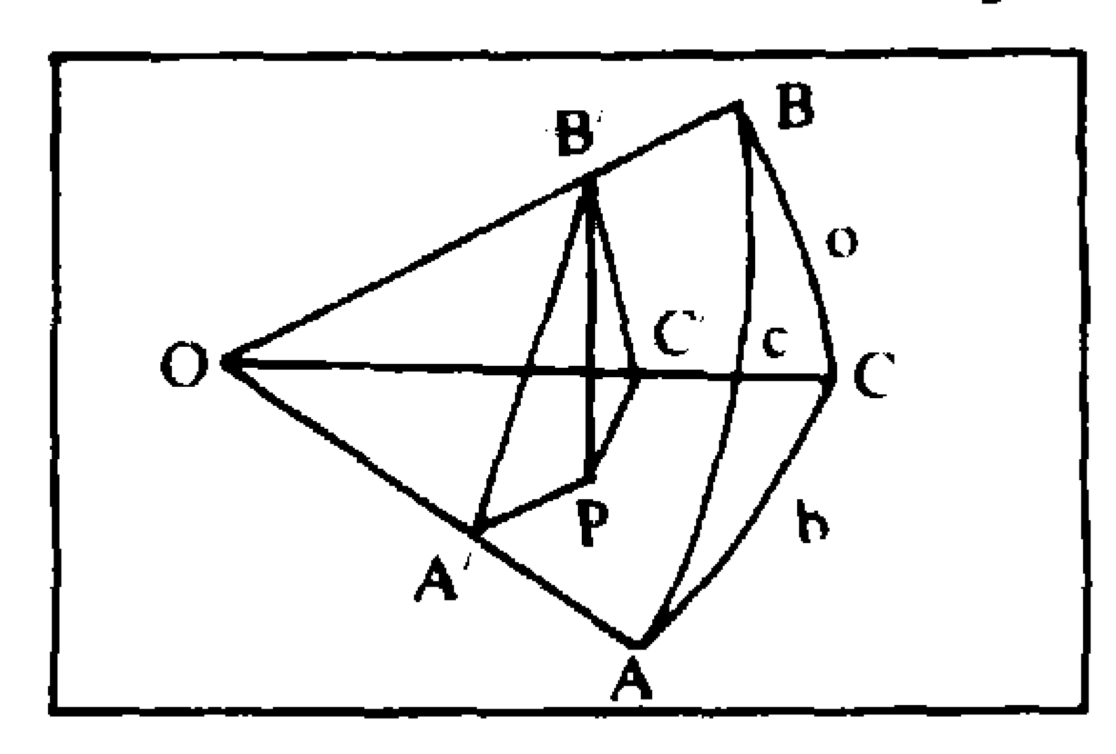
نقول عن سطح كروي أنه من النمط المكافىء إذا كان بالإمكان اختصار عنصره الخطي إلى الشكل:

$$ds^2 = du^2 + a^2\sin^2(u/a)\,dv^2$$

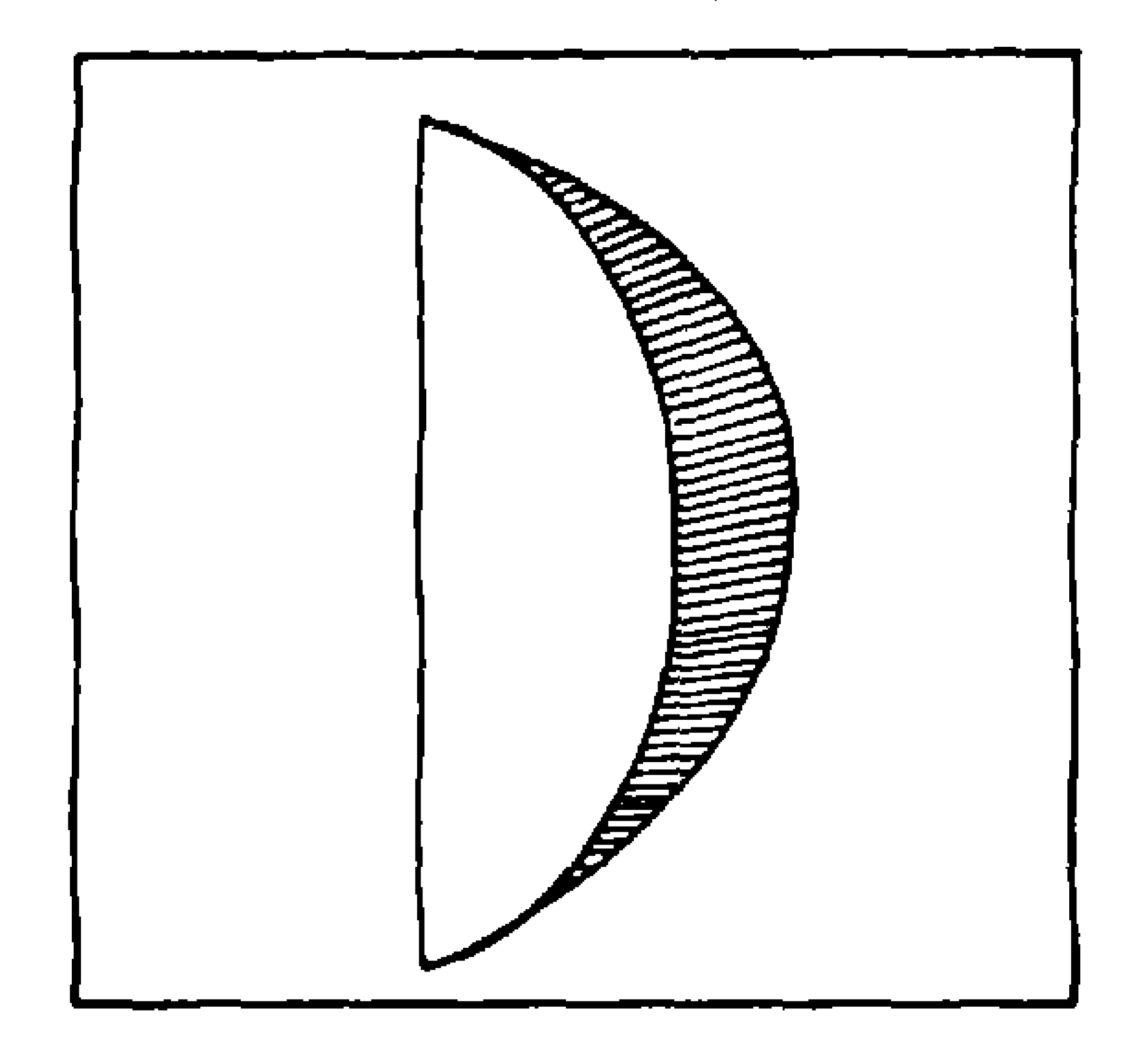
ويكون النظام الاحداثي جيوديزياً قطبياً، إذا كان S سطح دوران كروياً من النمط المكافىء فلا بد أن يكون S كرة.

● **مثلث كروي:**

هو مضلع كروي ذو ثلاثة أضلاع (انظر مضلع كروي أعلاه). أي أن المثلث الكروي هوجزء من الكرة تحده ثلاثة أقواس من دوائر عظمى. في المثلث الكروي ABC (انظر الشكل) الأضلاع هي a ويساوي الزاوية BOC، الضلع b ويساوي الزاوية AOC، الضلع c ويساوي الزاوية AOB. أما زوايا هذا المثلث فهي: الزاوية A وتساوي الزاوية B′A′P′، والزاوية B والزاوية C وتساوي الزاوية B′C′P′.



نقول عن المثلث الكروي أنه **قائم** إذا كانت إحدى زواياه على الأقل قائمة. (يمكن أن يكون به زاويتان قائمتان ويسمى عندها ثنائي القائمة، كما يمكن أن يكون به ثلاث زوايا قائمة ويسمى ثلاثي القائمة)، ويسمى المثلث الكروي **ربعياً** إذا كان أحد أضلاعه 90°، و**مائلاً**، إذا لم تكن أي من زواياه قائمة، و**متساوي الساقين** إذا تساوى إثنان من أضلاعه، و**مختلف الأضلاع** إذا لم يتساو أي من أضلاعه. مساحة المثلث الكروي تساوي $\frac{\pi r^2 E}{180}$ حيث r نصف قطر الكرة و E الفائض الكروي للمثلث.



انظر **حل** ــ حل المثلث.

● **علم المثلثات الكروية:**

هو دراسة المثلثات الكروية وإيجاد الأضلاع أو الزوايا أو المساحات المجهولة عن طريق استعمال دوال مثلثية للزوايا المستوية التي تقيس أضلاع وزوايا المثلثات الكروية. انظر **علم المثلثات**.

● **اسفين كروي:**

هو مجسم محدود بواسطة هلال من كرة ومستويي دائرتيه العظميين. وحجم الاسفين يساوي $\frac{\pi r^3 A}{270}$ حيث r نصف قطر الكرة و A الزاوية الزوجية (بالدرجات) بين مستويي الاسفين.

رياضي ألماني اشتغل بالهندسة التفاضلية وهو الذي اخترع المفاضلة المتغايرة.

- **رموز كريستوفل الاقليدية:**

إذا أخذنا فضاء اقليدياً بعديته n وأخذنا الاحداثيات الديكارتية المتعامدة $y_1, \ldots, y_n$، يكون عنصر الطول ds معطى كما في المعادلة $ds^2 = \Sigma\, dy_i^2$ وتسمى رموز كريستوفل في هذه الحالة بالرموز الاقليدية وتكون رموز النوع الثاني كلها أصفاراً إذا أخذنا نظام الاحداثيات المتعامدة y_i. أما إذا أخذنا نظاماً عاماً x_i فـإنها لا تكـون كلهـا أصفـاراً ويمكن الحصـول عليهـا من المعـادلـة: $\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{\partial^2 y\lambda}{\partial x^j\, \partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial y^\lambda}$، التي تربط الرموز في النظام العام x^i والنظام الديكارتي المتعامد y^i، وبما أن رموز كريستوفل الاقليدية من النوع الثاني تكون أصفاراً في النظام الديكارتي المتعامد فإن المفاضلة المتغايرة في هـذا النظام لا تكون سوى المفاضلة الجزئية العادية. نستنتج من ذلك أن المفاضلة المتغايرة في الفضاء الاقليدي تكون تبديلية (حتى في نظام احداثيات عام) طالما كانت المفاضلة الجزئية تبديلية.

- **رموز كريستوفل:**

إذا كان لدينا شكل تفاضلي ثنائي الدرجة فإن رموز كريستوفل تكون دوالَّ معينة تتبع معاملات هذا الشكل ومشتقات هذه المعاملات من المرتبة الأولى. ويكون الشكل التفاضلي عادة هو الشكل التفاضلي الأساسي الأول والثنائي الدرجة على سطح ما. مثلاً: إذا أخذنا الشكل التفاضلي:

$$g_{11}dx_1^2 + 2\, g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

فإن رموز كريستوفل من النوع الأولى هي:

$$\left[{ij \atop k} \right] = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

حيث يأخذ كل من i,j,k القيم 1,2 . إذا اعتمد الشكل الثنائي الدرجة

على عدد n من المتغيرات فإن (b) تبقى كما هي، والفرق الوحيد هو أن i,j,k في هـذه الحالـة تأخـذ القيم 1,2,...,n . كـما أن الـرمـز $[{ij \atop k}]$ يكتب أحيانـاً Γ_{ijk}, C^k_{ij}, $[ij,k]$ ومن الملاحظ أن هذه الرموز متناظرة في i,j وذلك للشكل التفاضلي (a).

رموز كريستوفل من النوع الثاني هي:

$$\{{ij \atop k}\} = g^{k1}[{ij \atop 1}] + g^{k2}[{ij \atop 2}]$$

عندما تأخذ كل من i,j,k القيم 1,2 حيث أن g^{ki} هو متعامل g_{ki} في المعين:

$$\triangle = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}$$

مقسوم على $\triangle$ و $[{ij \atop k}]$ هي رموز كريستوفل من النوع الأول. كما أن الرمز $\{{ij \atop k}\}$ يكتب أحياناً $\{{k \atop ij}\}$ وذلك للاحتفاظ باصطلاح التجميع أو يكتب $\Gamma_{ij}{}^{k}$ وتكون هذه الرموز متناظرة في i,j (في حالة كون الشكل التفاضلي كما جاء في (a)) أما إذا أخذنا الشكل التفاضلي الثنائي الدرجة $g_{ij}dx^i dx^j$ في عدد n من المتغيرات (نلاحظ أننا نستعمل اصطلاح التجميع هنا) فإن رموز كريستوفل من النوع الأول تكون:

$$[{ij \atop k}] = 1/2\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

وتكون رموز كريستوفل من النوع الثاني: $\{{k \atop ij}\} = g^{k\sigma}[{ij \atop \sigma}]$ حيث أن متعامل $g^{ij} = \frac{g_{ij}}{g}$ أما g فهي معين المصفوفة $[g_{ij}]$(ويفترض دائماً أن $g_{ij} = g_{ji}$ وتكون هذه المصفوفة متناظرة). والجدير بالذكر أن رموز كريستوفل (سواء النوع الأول منها أو النوع الثاني) ليست موترات. لو أخذنا على سبيل المثال رموز كريستوفل من النوع الثاني في نظامين $\bar{x}^i, x^i$ من الاحداثيات لوجدنا أن القانون الذي يربطهما هو:

$$\overline{\{{i \atop jk}\}} = \{{\lambda \atop \mu\lambda}\}\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda}$$

حيث إن $\{ {}^{i}_{jk} \}$ تعني الرموز في النظام x^i أما $\{ {}^{\bar{i}}_{jk} \}$ فتعني الرموز في النظام x^{-i}.

● **موتر التقوس لريمان ـ كريستوفل:**

أو موتر ريمان ـ كريستوفل التقوسي.

انظر **ريمان**.

كْرين، مارك غريغوريفياتش (-KREIN, MARK GRIGORIEVICH (1907

عالم رياضي في التحليل الدالي والرياضيات التطبيقية.

● **مبرهنة كراين ـ ميلمان:**

إن أي مجموعة جزئية متراصة ومحدبة في فضاء طوبولوجي خطي موضعي التحدب، هي **غلاقة للمولد** المحدب للنقط المتطرفة لهذه المجموعة.

انظر **متطرف**.

كسر FRACTION

والكسر خارج قسمة كميتين. والمقسوم هو **الصورة** والقاسم هو **المخرج** (فصورة الكسر $\frac{3}{4}$ هو العدد 3 ومخرجه 4).

ويعرف الكسر البسيط بأنه الكسر الذي صورته ومخرجه عددان صحيحان بخلاف **الكسر المعقد** والذي قد تكون صورته أو مخرجه أو كلاهما كسرين.

أما **كسر الوحدة** فهو كسر صورته 1.

ويمكن دائمًا تحويل الكسر المعقد إلى كسر بسيط كما يوضح المثال التالي:

$$\frac{1}{3}/(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{3} / \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$$

ونقول أن كسرين **متشابهان** إذا تساوى مخرجاهما.

والكسر النسبي يعرف بأنه كسر صورته ومخرجه عددان منطقان.

والكسر **الفعلي** هو كسر صورته ومخرجه عددان حقيقان إذا كانت صورته أقل من القيمة المطلقة من مخرجه. أما إذا كانت الصورة أكبر من أو يساوي في القيمة المطلقة من المخرج فإن الكسر يسمى **بالكسر المعتل** ($\frac{2}{7}$ كسر فعلي و $\frac{4}{3}$ كسر معتل).

كما نسمي الكسر الذي صورته ومخرجه كثيرا حدود **بالكسر النسبي** (أو الدالة النسبية). وفي هذه الحالة يكون الكسر **فعلياً** إذا كانت درجة الصورة أقل من درجة المخرج ويكون **معتلاً** خلاف ذلك.

فمثلاً $\frac{x^2}{x+1}$ كسر معتل وأما $\frac{x-y}{xy}$ فهو كسر فعلي في x و y ولكنه معتل في x أو y منفصلين.

- **التخلص من الكسور:**

للتخلص من الكسور في معادلة فإننا نضرب طرفي المعادلة بمخرج مشترك للكسور في المعادلة.

انظر غريب ــ جذر غريب.

- **تفريق كسر:** هو كتابة الكسر كمجموع كسور جزئية.
- **جمع وطرح وضرب وقسمة الكسور:** انظر **مجموع ــ** مجموع أعداد حقيقية.
- **كسر جزئي:** انظر جزئي ــ كسور جزئية.
- **الكسر العشري:** انظر عشري.
- **الكسر المستمر:**

هو عدد زائد كسر مخرجه أيضاً عدد زائد كسر وهكذا مثل

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{a_5 \cdots}}}}$$

ويمكن أن يكون للكسر المستمر عدد منته أو لا منته من الحدود. وفي الحالة الأولى فإنه يسمى **بالكسر المستمر المنتهي** وفي الحالة الثانية فإنه يسمى **بالكسر المستمر اللامنتهي**.

كسر دوري RECURRING FRACTION

انظر كسر.

- **عشري دوري:**

نفس عشري متكرر.

كسري FRACTIONAL

- **الأس الكسري:**

انظر أس.

- **المعادلة الكسرية:**

(1) هي معادلة تحتوي على أي نوع من الكسور مثل

$$\frac{1}{2}x + 2x = 1$$

(2) أو هي معادلة تحتوي على كسور مخرجها يحتوي على المتغير مثل

$$x^2 + 2x + \frac{1}{x^2} = 0$$

كُفْؤ EFFICIENT

- **مقدّر كفؤ (إحصاء):**

يوجد بعض الارتباك بالنسبة لتعريف المقدّر في علم الاحصاء بحيث توجد عدة تعاريف منها:

(1) المقدّر غير المتحيز T الذي يعتمد على عينة عشوائية $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هو مقدّر كفؤ للوسيط θ إذا كان تباين T (أي $E(T - \theta)^2$) يحقق

$$E(T - \theta)^2 = 1/nE(\partial \ln f/\partial \theta)^2$$

حيث f هي دالة التوزيع الاحتمالي الذي سحبت منه العينة. ويلاحظ أن الطرف الأيمن في المساواة أعلاه هو الحد السفلي في متباينة كرامر وراو. (انظر كرامر). وينتقد هذا التعريف لسبب أن متباينة كرامر وراو ليست الوحيدة التي تغطي حدًّا سفلياً للتباين بل هناك متباينات أكثر دقة. والسبب الآخر للانتقاد هو عدم إمكانية بلوغ الحد السفلي لمتباينة كرامر وراو من قبل أي مقدّر غير متحيز في حالات كثيرة.

(2) نقول إن المقدّر غير المتحيز T هو مقدر كفؤ للوسيط إذا كان تباينه $E(T - \theta)^2$ أصغر ما يمكن بين كل المقدّرات غير المتحيزة الأخرى. وينتقد هذا التعريف بأنه لا يأتي بشيء جديد بل ينطبق على مفهوم وتعريف التباين الأصغر.

ونعرّف **كفاءة** مقدّر غير متحيز t للوسيط θ بأنها المقدار $E(T - \theta)^2/E(t - \theta)^2$ حيث T هو المقدّر الكفؤ.

(3) نعرّف الكفاءة بمفهوم نهائي عندما تؤول n إلى اللانهاية. نقول أن متتالية المقدرات $\{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$ كفؤة تقاربياً إذا كان

$$\lim_{n \to \infty} \left| Var(T_n) - \frac{1}{nE(\partial \ln f/\partial \theta)} \right| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} E(T_n) = \theta$$

حيث $Var(T_n)$ هو تباين T_n.

(4) في هذا التعريف نلفت الانتباه إلى طائفة من المقدرات تسمى **مقدرات طبيعية تقاربياً ومتّسقة**. نقول إن المقدّر T_n هو **مقدّر طبيعي تقاربياً ومتسق للوسيط** θ إذا كان التوزيع التقاربي لـ $\sqrt{n}(T_n - \theta)$ هو التوزيع الطبيعي بوسط يساوي صفراً. ونقول إن المقدر T_n الطبيعي تقاربي والمتسق هو مقدّر كفؤ (أو أحسن مقدر) إذا كان تباين التوزيع التقاربي لـ $\sqrt{n}(T_n - \theta)$ أصغر ما يمكن.

● **تكامل على كفاف:**

لتكن f دالة عقدية القيم وليكن C منحنياً يصل بين النقطتين p,q في المستوى العقدي (أو على سطح ريماني) لنأخذ النقاط

$$z_0 = p, z_1, z_2, \ldots, z_n = q$$

على q لتقطعه إلى n من القطع المتعاقبة. ولنأخذ η_i نقطة على القطعة من C التي تصل z_{i-1} بالنقطة z_i.

ولتكن δ هي الأكبر بين الأطوال $|z_i - z_{i-1}|$.

التكامل على كفاف $\int_p^q f(z)dz$ هو نهاية $\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(z_i - z_{i-1})$

عندما تقترب δ من الصفر، إذا كانت تلك النهاية موجودة. إذا كانت f مستمرة على C وكان C قابلاً للقياس يكون التكامل موجوداً. إذا كانت هناك دالة F بحيث يكون $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$ عند كل نقطة من نقاط C فإن التكامل يكون $\int_p^q f(z)dz = F(q) - F(p)$

بإضافة بعض الشروط المناسبة على C فإن هذا التكامل على كفاف يمكن تقييمه لأي من هذين التكاملين على خط:

$$\int f(z)z'(t)dt$$

$$\int (udx - vdy) + i\int (vdx + udy)$$

حيث $z = z(t)$ هي معادلة المنحنى C والدالة f تساوي

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

حيث $z = x + iy$ ، $u(x,y)$، $v(x,y)$. دالتان حقيقتان.

انظر **كوشي ـ صيغة كوشي للتكامل، مبرهنة كوشي للتكامل.**

● **خطوط كفاف:**

(1) لنأخذ سطحاً S ومستوياً P، ولتكن $\{P_\alpha\}$ عائلة من المستويات

الموازية للمستوى P والمتساوية البعد عن بعضها البعض. **خطوط الكفاف هي مساقط تقاطعات $\{P_\alpha\}$ مع S على المستوى P.**

(2) هي خطوط على خريطة تمر بالنقاط ذات الارتفاع الواحد.

وهي تدل على معدل صعود السطح لأن خطوط الكفاف تكون أثخن عندما يرتفع السطح بشكل حاد أكثر.

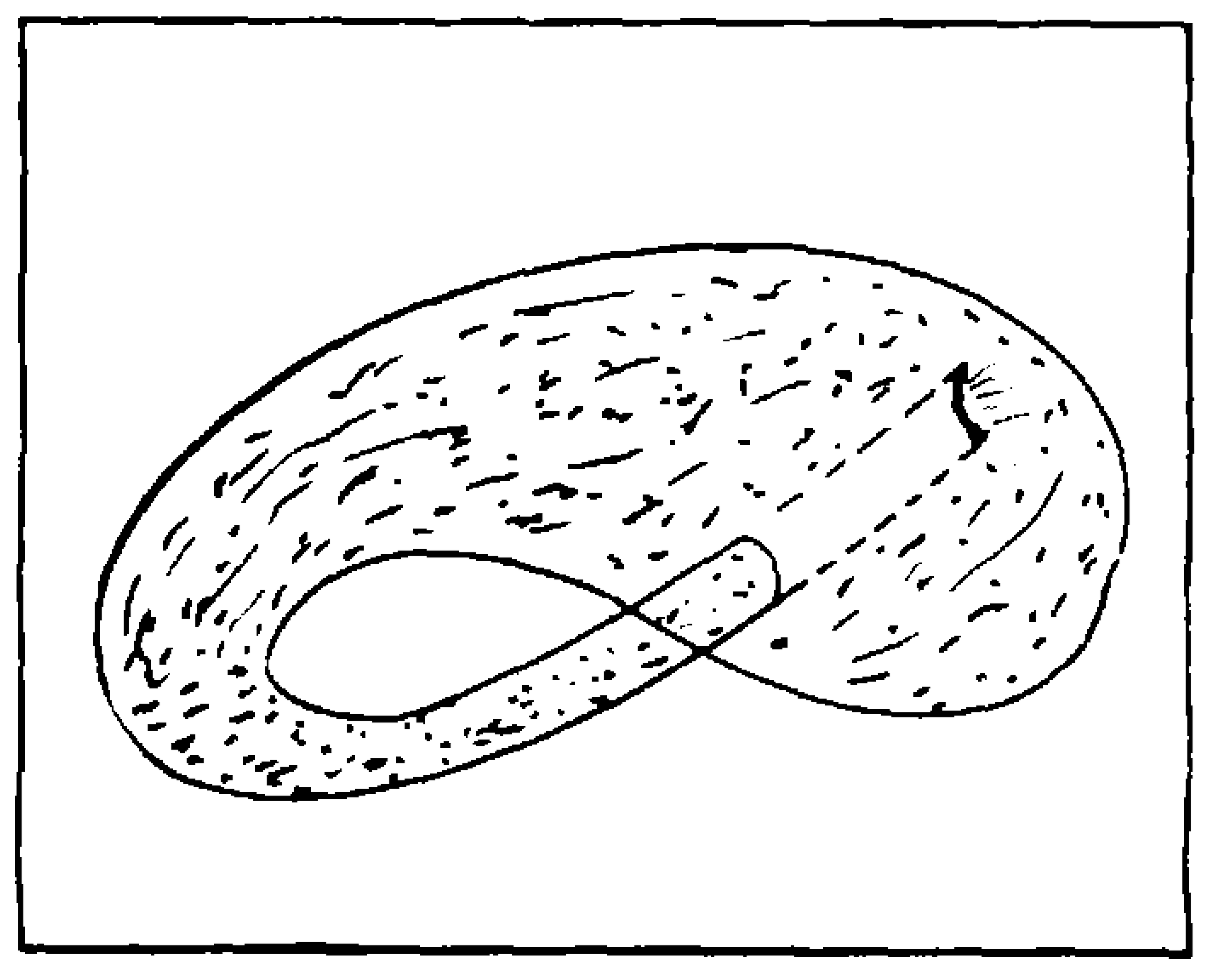
ومن مرادفاتها خطوط التساوي أو خطوط المستوى.

كلاين، كريستيان فيلكس **KLEIN, CHRISTIAN FELIX (1849-1925)**

عالم ألماني في الجبر والتحليل والهندسة والطوبولوجيا وتاريخ الرياضيات والفيزياء. ولقد طور برنامجاً لتصنيف الهندسات وفقاً للخواص اللامتغيرة تحت تأثير زمر التحويلات.

- **قنينة كلاين:**

هي سطح ذو جانب واحد بدون أحرف وبدون (داخل) أو (خارج). ويتم تشكيل هذا السطح بإدخال الطرف الأصغر لأسطوانة قمعية من جانب واحد ثم مد هذا الطرف ليلتصق بالطرف الأوسع.



كلمة (حاسب) **WORD**

هي محتوى أحد المواضع الخازنة في الحاسب الآلي، وهي مجموعة مرتبة من الأرقام تؤخذ كوحدة واحدة وتدل على قيمة عدد أو تعليمات للحاسب.

كَلْمَغُورَف، اندريه نيكولايفيتش

KOLMOGORV, ANDREI NIKOLAEVICH

عالم روسي في التحليل الرياضي والاحتمالات والطوبولوجيا. ويعتبر مؤسساً لنظرية الاحتمالات انطلاقاً من نظرية المجموعات.

- **فضاء كلمغورف:**

نفس الفضاء T_0.

انظر **طوبولوجي ـ فضاء طوبولوجي**.

كلير، الكس كلود

CLAIRAUT (or CLAIRAULT, ALEXIS CLAUDE (1713-1765)

عالم فرنسي اشتغل بالتحليل والهندسة التفاضلية والفلك.

- **معادلة كليرو التفاضلية:**

هي معادلة تفاضلية من الشكل

$$y = xy' + f(y')$$

حيث f هي دالة ما. الحل العام لهذه المعادلة هو

$$y = cx + f(c)$$

والمعادلات الوسيطية التالية تعطينا حلاً منفرداً.

$$y = -pf'(p) + f(p), \; x = -f'(p)$$

كلي

TOTAL

- **تفاضل كلي:**

انظر **تفاضل**.

- **تقوس كلي:**

انظر **تقوس ـ تقوس السطح**.

كلياً TOTALLY

● **غير متصل كلياً:**

انظر غير متصل ـ مجموعة غير متصلة.

● **محدود كلياً:**

انظر محدود ـ مجموعة محدودة من النقاط.

كليل

انظر مستدق.

الكمون

يعرف الكمون في نقطة ما بأنه: «العمل المبذول معاكساً لحقل محافظ أو باتجاهه (ويعتمد ذلك على اصطلاح الإشارة) لتحريك واحدة ما من مصدر محدد من اللانهاية إلى النقطة المعتبرة» وبعبارة أخرى فهو «القيمة المختلفة لتابع ما يكون مشتقه المتجهي في أي نقطة مساوياً بالمقدار لمركبة شدة الحقل في تلك النقطة وبنفس اتجاهها».

إن هذا المفهوم مكثف جداً ويمكن أن يوضح بشكل كاف بوصف أمثلة خاصة به، منها ما يلي:

● **كمون مجموعة (طريقة التركيز):**

تتلخص هذه الطريقة باختبار نقطة ما(0) من داخل المجموعة ثم التعبير عن r_t بدلالة مقادير مرتبطة بـ (0)، فمثلاً:

r: هي المسافة بين 0 ونقطة المجال.

ℓ_i: هي المسافة بين 0 والشحنة e_i.

θ_i: هي الزاوية بين r و ℓ_i.

ومن قانون جيب التمام و (Binomial theary) سنجد أن:

$$r_t^{-1} = (r^2 + \ell_i^2 - 2rl_r \cos\theta_i)^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r} + (\ell_i \cos\theta_i)\frac{1}{r^2} + \ell_i (3\cos^2\theta_i - 1)\frac{1}{2r^2} + \dots$$

فإذا رمزنا إلى λ_i بأنها المتجه بين 0 و e_i وإلى ρ_i بأنها متجه الواحدة من 0 باتجاه نقطة المجال وإلى μ_i بأنه المتجه $e_i\lambda_i$ فإننا نجد أن:

$$\mu_i \cdot \rho_1 = e_i \ell_i \cos\theta_i$$

ومنه فإن $\Sigma e_i \ell_i \cos\theta_i = \Sigma\, \mu_i . \rho_1 = \mu\rho_i$، حيث $\mu = \Sigma\mu_i$. نعرف عند ذلك المتجه μ بأنه (استقطاب التجمع)، أو (Polarization of Complex) فإذا ضربنا الآن المعادلة السابقة التي تعطى r_i^{-1} بالمقدار e_i (مجموعاً على i) ورمزنا للشحنة الكلية Σe_i بالرمز e فسنجد أن الكمون يقترب من العبارة:

$$e\frac{1}{r} + \mu\rho_1 \frac{1}{r^2} + \dots$$

فإذا كانت المجموعة تشتمل على شحنتين متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالإشارة (أو الاتجاه) وافترضنا أن الشحنة السالبة هي e_1 فإننا يمكن أن نقول أن: $\mu_1 + \mu_2 = e_2(-\lambda_1 + \lambda_2) = \mu$

إن $-\lambda_1 + \lambda_2$ ليست إلا متجهاً من الشحنة السالبة e_1 إلى الشحنة الموجبة e_2 وبالتالي فإن الاستقطاب لهذا التجمع الخاص هو متجه يتجه من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة قيمته m وتساوي عددياً إلى قيمة الشحنة الموجبة مضروبة بالمسافة بين الشحنتين.

الكمون الثقالي لتجمع من الجزئيات

GRAVITATIONAL POTENTIAL OF COMPLEX OF PARTICLES (NEWTONION POTENTIAL)

- **الكمون النيوتوني:**

إن الدالة التي نحصل عليها في $\Sigma\frac{e_i}{r_i}$ بتبديل e_i بـ $-Gm_i$ حيث تمثل G ثابت الثقالة m_i كتلة الجزئية i يسمى الكمون النيوتوني. ويغفل معظم الكتاب

إشارة (−) التي تسبق Gm_i ويعوضونها بمكان آخر. وعندما نفعل ذلك فإننا نحصل على التدرج الموجب للكمون. أما إذا حذفنا الإشارة السالبة وأعطينا إلى G قيمة الواحدة فإن دالة الكمون النيوتوني للتجمع تصبح $\Sigma \frac{m_i}{r_i}$.

● **الكمون الحركي: (Kenetic potential)**

هو الفرق بين الطاقة الحركية والطاقة الكامنة. أو تابع لاغرانج.

● **الدالة الكمونية لتوزيع ثنائيات القطب مزدوج الطبقة على سطح:**

يعطى هذا الكمون بالعبارة: $U = \int m \cos\theta\, r^{-2} ds$

وتمثل m هنا العزم في وحدة المساحة لتوزع ثنائي القطب. أما θ فهي الزاوية بين متجه الاستقطاب ومتجه نقطة الحقل (راجع طريقة التركيز). إذا كانت m ليست فقط مستمرة بل من المرتبة C وكان متجه الاستقطاب ناظمياً على السطح، فإن:

$$\text{Lim} \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_N = \text{Lim} \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_M$$

حيث M,N تتناهى إلى P. وفي هذه الحالة فإن U ستعاني من انقطاع عند ورودها على كامل السطح وعلى ذلك فإذا كانت m مستمرة و M,N نقطتين على السطح الموجب والسالب من مستوى P، فإن: $\text{Lim}\, U(M) = U(p) + 2\pi\, m(p)$

بينما $\text{Lim}\, U(N) = U(p) - 2\pi\, m(p)$.

● **الدالة الكمونية لتوزيع سطحي لشحنة أو كتلة:**

تعرف الدالة U بأنها $U = \int \frac{\sigma}{r} ds$ حيث σ هي الكثافة السطحية للشحنة أو الكتلة باعتبارها مستمرة

U مستمر ولكن مشتقها الناظمي يعاني من انقطاع على السطح.

فإذا اخترنا نقطة ما على السطح p (ليست على الحافة) وأوجدنا الناظم في p واختزلنا نقطتين M,N على الناظم ليستا على طرفي نقيض وحسبنا المشتق الناظمي من M إلى N في كلتا النقطتين M,N فإن نهاية العبارة التالية عندما تصل M,N إلى P: $\frac{\partial}{\partial n}\Big|_N - \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_M$ هي $-4\pi\sigma$.

● الدالة الكمونية بالنسبة إلى دالة متجهية محددة ϕ:

إن الدالة العددية مثل $\phi = \nabla S$ أو $\phi = -\nabla S$ تعتمد على الاصطلاح السائد. فإذا كانت ϕ تمثل سرعة فإن S هي كمون السرعة.

● الدالة الكمونية لتوزع حجمي لشحنة أو كتلة:

إذا كان لدينا توزع حجمي مستمر لشحنة أو كتلة فإن الدالة الكمونية لها $\int \frac{\rho}{r} dv$، حيث تمثل ρ شحنة نقطية من التابع ولتكن $\rho(X,Y,Z)$ في الاحداثيات الديكارتية، r هي المسافة من الشحنة إلى النقطة x,y,z من الحقل. أما مجال الاستكمال فهو الحجم المشغول بالشحنة. وعلى ذلك فإنه في العبارة $\iiint \frac{\rho}{r} dx\, dy\, dz$ تكون X,Y,Z متغيرات التكامل في حين تكون x,y,z الوسطاء وبالتالي فإن $\int \frac{\rho}{r} dv$ هي الدالة الكمونية للمتحولات x,y,z.

● الكمون في المغناطيسية الساكنة:

إن العمل المبذول في مجال مغناطيسي لتحريك قطب موجب قيمته الواحدة من نقطة ما إلى اللانهاية أو إلى أي نقطة نعتبر أن كمونها صفراً هو الكمون المغناطيسي.

● نظرية الكمون:

يمكن اعتبارها ممثلة بمعادلة لابلاس حيث يمكن اعتبار أي دالة توافقية كدالة كمونية، أما الدالة الكمونية النيوتونية فإنها دوال توافقية في فراغ حر.

● طريقة النشر لكمون تجمع:

بدلاً من استبدال تجمع بسلاسل من عناصر وهمية موضوعة في نقطة وحيدة فإن طريقة النشر تستبدل مجموعة الشحنات النقطية بتوزع مستمر للشحنات يتم تمييزه بدالة كثافة $\rho(x,y,z)$ أو بكثافة الشحنات وكثافة الاستقطاب معاً. فإذا كانت الشحنات والاستقطاب قابلة للانتشار فإن دوالّ أبسط ستكون كافية لإعطاء درجة معقولة من التقريب. وفي كلتا الحالتين تكون الدالة هي $\int \frac{\rho}{r} dv$ إذا تم نشر الشحنة فقط، أما في الحالات الأخرى فإنه يكون:

$$\int \frac{\rho}{r} dv + \int (m \cos \theta) \frac{1}{r^2} dv$$

وتكون m هنا هي القيمة المطلقة للاستقطاب في وحدة الحجم وإذا

اعتبرنا أن الاستقطاب موزع على السطح فإن التكامل الثاني يجب استبداله بتكامل سطح هو: $\int m \cos\theta . r^{-2} ds$

حيث m هنا مقدار الاستقطاب في وحدة السطح.

● **الكمون المتجهي بالنسبة إلى دالة متجهية محددة القيمة ϕ:**

إذا كانت الدالة المتجهية المحددة القيمة هي ψ فإن $\phi = \nabla \times \psi$.

QUANTITY **كمية**

هي أية عبارة حسابية أو جبرية أو تحليلية تتعلق بالقيمة.

MOMENTUM **كمية الحركة**

● عزم كمية الحركة **H**:

لجسم كتلته m بالنسبة لنقطة 0 يعطى بالعلاقة: $\overline{H} = \overline{r} \times m\overline{v}$

حيث $\overline{v}$ هي سرعة الجسيم، و $\overline{r}$ هو متجه البعد للجسيم عن O وإشارة الضرب هنا تعني الجداء المتجه. (أنظر متجه). أما عزم كمية الحركة لمجموعة جسيمات فهو مجموع عزوم الحركة لهذه الجسيمات. ويتم تعريف عزم كمية الحركة لكتلة موزعة بشكل مستمر بالعلاقة $\overline{H} = \int_s (\overline{r} \times \overline{v})\, dm$ حيث تتم المكاملة على الجسم بكامله.

● كمية الحركة لجسيم:

هي بالتعريف $m\overline{v}$ حيث m هي كتلة الجسيم و $\overline{v}$ سرعته. وتسمى أحياناً كمية الحركة الخطية لتمييزها عن كمية الحركة الزاوية أو عزم كمية الحركة. ونعرف كمية الحركة الخطية لمجموعة من الجسيمات التي كتلها $m_1, m_2, ..., m_n$ والتي تتحرك بسرعات $\overline{v_1}$ ، $\overline{v_2}, ..., \overline{v_n}$ بأنها المتجه $\overline{M} = \sum_i m_i \overline{v}_i$ الممثل لمجموع كميات الحركة الخطية لهذه الجسيمات.

أما كمية الحركة لتوزيع مستمر لكتلة فيعرف بالتكامل $\overline{M} = \int_s \overline{v}\, dm$ المحسوب على الجسم الذي تشغله هذه الكتلة.

● **كمية الحركة الزاوية:**

هي نفس عزم كمية الحركة.

● **مبدأ كمية الحركة الخطية:**

إن معدل التغير في كمية الحركة الخطية بالنسبة للزمن لمجموعة جسيمات يساوي المجموع المتجهي للقوى الخارجية، أي $\overline{F} = \frac{d\overline{M}}{dt}$ حيث $\overline{F}$ هي المجموع المتجهي للقوى الخارجية و M كمية الحركة.

ELECTROSTATIC — كهروسكوني

● **شدة حقل كهروسكوني في نقطة:**

يتم إيجاد شدة الحقل في نقطة P من الفضاء تبعد بعداً r عن الشحنة q، وذلك بوضع شحنة موجبة اختبارية q' في P وعندئذٍ يعطينا قانون كولون مقدار القوة المطبقة على الشحنة الاختبارية كالآتي: $F = \frac{1}{4\pi\zeta} \cdot \frac{qq'}{r^2}$

ولما كانت شدة الحقل E في النقطة P تساوي $\frac{F}{q}$ فإن شدة الحقل تأخذ الشكل: $\overline{E} = \frac{\overline{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\zeta} \frac{q}{R^2}$

وتكون جهة الحقل مبتعدة عن P إذا كانت q شحنة موجبة وتتجه نحو P إذا كانت q سالبة.

QUADRILLION — كوادريليون

هو العدد 10^{15} في فرنسا وأميركا بينما هو 10^{24} في إنجلترا.

KUTTA, WILHELM MARTIN (1867-1944) — كوتا، ويلهيلم مارتين

عالم ألماني في الرياضيات التطبيقية.

انظر رونغ ـ طريقة روغن ـ كوتا.

كوتس، روجر — COTES, ROGER (1682-1716)

رياضي إنجليزي ساعد نيوتن في تحضير الطبعة الثانية من كتابه «المبادىء الأساسية». اشتغل أيضاً بالجداول الحسابية.

انظر **نيوتن – صيغ نيوتن – كوتس التكاملية**.

كودازي، دلفينو — CODAZZI, DELFINO (1824-1873)

رياضي إيطالي اشتغل بالهندسة التفاضلية.

● **معادلات كودازي:**

هي المعادلات:

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} D + \left(\left\{ {1\,1 \atop 1} \right\} - \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\} \right) D' + \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\} D'' = 0$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\} D + \left(\left\{ {2\,2 \atop 2} \right\} - \left\{ {1\,2 \atop 1} \right\} \right) D' - \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\} D'' = 0$$

في المعادلات الأساسية من المرتبتين الأولى والثانية لسطح. وفي الترميز الموتري تكون هذه المعادلات:

$$d\alpha\alpha.\beta - d\alpha\beta.\alpha = 0 \qquad \alpha \neq \beta$$

كل العلاقات بين المعاملات الأساسية ومشتقاتها يمكن الحصول عليها من معادلات غاوس وكودازي لأن هذه المعادلات تحدد السطح بشكل وحيد باستثناء موقعه في الفضاء.

انظر **كريستوفل – رموز كريستوفل**.

كودايرا، كونيهيكو — KODAIRA, KUNIHIKO

عالم ياباني – أميركي رياضي حصل على وسام استحقاق عام 1954. أما مجال بحثه فهو التكاملات التوافقية والأشكال التوافقية مع تطبيقاتها على المتنوعات الجبرية والكاهلرية.

KURATOWSKI, KAZIMIERZ (1869-) كوراتوفسكي، كازيميرز

عالم رياضي بولندي في التحليـل والطوبولوجيا.

● **تمهيدية كوراتوفسكي:**

انظر زورن ـ تمهيدية زورن.

COURANT, RICHARD (1888-1972) كورانت، ريتشارد

عالم ألماني ـ أميركي اشتغل بالتحليل والرياضيات التطبيقية وأسهم بشكل خاص بنظرية الكمون، ونظرية المتغيرات العقدية وحسبان التغيرات.

● **مبدأ القيمة العظمى والقيمة الصغرى والقيمة الصغرى ـ القيمة العظمى لكورانت:**

هما مبرهنتان تصفان القيمة الذاتية التي ترتيبها n لمسائل قيمة ذاتية معينة وذلك دون استعمال القيمة الذاتية السابقة أو المتجهات الذاتية المشاركة. تطبق هذه المبرهنات على مؤثر متناظر T على فضاء جداء ـ داخلي H الذي يوجد من أجله متتالية متعامدة معيرة $\{\phi_n\}$ بحيث تكون كل ϕ_n متجهاً ذاتياً للمؤثر T

$$(T(\phi_n) = \lambda_n\phi_n)$$

إذا كانت المتتالية $\{\lambda_1,\lambda_2,...\}$ متزايدة رتيبة فإن **مبرهنة القيمة العظمى ـ القيمة الصغرى** تقول أن λ_n هي القيمة العظمى التي تأخذها $m(f,f_1,f_2,...,f_{n-1})$ حيث $m(f_1,f_2,...,f_{n-1})$ هي القيمة الصغرى للجداء الداخلي (Ty,y) إذا كانت y في مجال T وكانت $||y|| = 1$ وكانت y عمودية على f_k إذا كان k أقل من n.

إذا كانت $\{\lambda_1,\lambda_2,...\}$ متناقصة رتيبة فإن **مبرهنة القيمة الصغرى ـ القيمة العظمى** تقول أن λ هي القيمة الصغرى التي تأخذها $M(f_1,...,f_{n-1})$ حيث $M(f_1,...,f_{n-1})$ هي القيمة العظمى للجداء الداخلي (Ty,y) وذلك عندما تكون y في مجال $T, 1 = ||y||$, y عمودية على f_k إذا كان k أقل من n.

كورد — CORD

هو كدس من العيدان الخشبية طوله 8 أقدام عرضه 4 أقدام وارتفاعه 4 أقدام أيضاً.

كوريوليس، غاسبار غوستاف — CORIOLIS, GASPARD DE (1792-1843)

رياضي وفيزيائي فرنسي.

- **تسارع كوريوليس:**

انظر تسارع ـ تسارع كوريوليس وقوة كوريوليس هنا.

- **قوة كوريوليس:**

هي قوة على الجسيمات الأرضية ناتجة عن دوران الأرض حول محورها. ومقدار هذه القوة هو 2mwv حيث w هي السرعة الزاوية لدوران الأرض و v هي السرعة العادية للجسيم بالنسبة إلى الأرض و m هي كتلة الجسيم.

ونظراً لصغر السرعة الزاوية للأرض (2π راديان في اليوم أو 7.27×10^{-5} راديان في الثانية) فإن تأثير قوة كوريوليس غالباً ما تهمل في التطبيقات التقنية ولكنها مهمة جداً في الأرصاد الجوية والمسائل الجغرافية.

تؤثر قوة كوريوليس مثلاً في حركة الرياح.

كوشي، اوغوستيني لويس — CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS (1789-1857)

عالم فرنسي كبير اشتغل بالتحليل ونظرية الزمر والرياضيات التطبيقية. ويعتبر أكثر الرياضيين غزارة في الانتاج وذلك بعد أويلر. فبالاضافة إلى ما سبق، كان له إنجازاته في نظريات الموجات والمرونة كما جعل الحسبان أكثر دقة وأسس نظرية الدوال العقدية، أما في المعادلات التفاضلية فقد فتحت مبرهناته حول الوجود عهداً جديداً.

● اختبار كوشي التكاثفي للتقارب:

إذا كانت Σa_n متسلسلة حدودها موجبة رتيبة التناقص وكان P أي عدد صحيح موجب تكون المتسلسلتان

$$(i)\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

$$(ii)\ pa_p + p^2 a_{p^2} + p^3 a_{p^3} + \ldots$$

متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً.

● شرط كوشي لتقارب المتتالية:

تكون المتتالية اللامنتهية $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ متقاربة إذا وفقط إذا كان لكل $\epsilon > 0$ يوجد N بحيث يكون $|S_{n+h} - S_n| < \epsilon$ وذلك لكل n أكبر من N وكل عدد صحيح موجب h.

انظر متتالية ـ متتالية كوشي.

● شرط كوشي لتقارب المتسلسلة:

الشرط اللازم والكافي لتقارب المتتالية $\sum_1^\infty a_n$ هو أنه لكل $\epsilon > 0$ يوجد N بحيث يكون $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+h}| < \epsilon$

وذلك لكل n أكبر من N وكل عدد صحيح موجب h.

انظر تام ـ فضاء تام.

● توزيع كوشي:

نقول عن متغير عشوائي أنه متغير كوشي العشوائي أو أن له توزيع كوشي إذا كان هناك عددان u و L بحيث تكون دالة الكثافة للاحتمال محققة للمعادلة: $f(x) = \dfrac{L}{\pi[(L^2 + (x-u)^2]}$

يكون التوزيع متناظراً حول u ولكن لا يكون له وسط أو تباين لأن ليس له عزم منته من أي مرتبة. وتكون دالة التوزيع التراكمي

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arc\tan[(x-u)/L]$$

يكون لأواسط العينات العشوائية من مرتبة n لمتغير عشوائي x نفس

التوزيع الذي للمتغير x وذلك لكل n. توزيع t الذي له درجة حرية واحدة هو توزيع كوشي بحيث يكون u=0,L=1.

● **مبرهنة كوشي ــ هادامارد:**

تقول هذه المبرهنة بأن نصف قطر التقارب لمتسلسلة تايلور $a_0 + a_{1z} + a_{2x^2} + \dots$ بالمتغير العقدي Z تعطيه المعادلة:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}_{, \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

● **معادلات كوشي ــ ريمان التفاضلية الجزئية:**

إذا كانت كل من u و v دالة في x و y فإن معادلات كوشي ــ ريمان هي:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

تميز هذه المعادلات الدوال التحليلية $U + iV$ للمتغير العقدي $x + iy$، وتتحقق (أي المعادلات) إذا وفقط إذا كان التطبيق T (المعرّف بواسطة $T(p^2a_{p^2}) = u + iV$ متزاوياً عند كل النقاط باستثناء تلك التي تكون عندها المشتقات الأربعة أصفاراً.

● **متتالية كوشي:**

انظر متتالية ــ متتالية كوشي.

● **شكل كوشي للباقي في مبرهنة تايلو:**

انظر تايلور ــ مبرهنة تايلور.

● **متباينة كوشي:**

هي المتباينة $|\sum_1^n a_ib_i|^2 \leq \sum_1 |a_i|^2 . \sum_1^n |b_i|^2$

انظر أيضاً شفارتس ــ متباينة شفارتس.

● **صيغة كوشي التكاملية:**

هي الصيغة $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\psi)}{\psi - z} d\psi$

حيث إن f دالة تحليلية بالمتغير العقدي z في مجال منته بسيط الاتصال D.
أما C فهو منحنى في D بسيط مغلق قابل للقياس و z هي نقطة في المجال المنتهي الذي يحده C.

يمكن توسيع هذه الصيغة لتصبح كما يلي:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(\psi)}{(\psi - z)^{n+1}} d\psi$$

وذلك لكل عدد صحيح موجب n.

- **اختبار كوشي التكاملي لتقارب المتسلسلة المنتهية:**

لنفترض أن هناك متسلسلة Σa_n ودالة f لها الخصائص التالية:

(i) يوجد عدد N بحيث تكون f دالة موجبة رتيبة التناقص على الفترة (N,∞).

(ii) $f(n) = aa_n$ إذا كان n كبيراً بما فيه الكفاية. يكون إذاً الشرط اللازم والكافي لتقارب المتسلسلة Σa_n هو أن نجد عدداً a بحيث يكون $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارباً.

مثلاً في حالة المتسلسلة $\Sigma \frac{1}{n^p}$ تكون الدالة $f(x) = \frac{1}{x^p}$ أما التكامل فهو:

إذا كان $p \neq 1$, $\int_1^\infty x^{-p}dx = x^{1-p}(/(1-p)]_1^\infty$

إذا كان $p = 1$, $\int_1^\infty x^{-p}dx = \log x]_1^\infty$

ولمعرفة التقارب نلاحظ أنه إذا كان $p = 1$ يكون $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$

ويكون التكامل غير متقارب.

أما إذا كان $p > 1$ فيكون $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} = 0$

ويكون التكامل متقارباً. وإذا كان $p < 1$ نحصل على $\lim_{\alpha\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \infty$

ويكون التكامل غير متقارب لذا نستنج أن المتسلسلة $\Sigma \frac{1}{n^p}$ تتقارب إذا كان $p > 1$ وتتباعد إذا كان $p \leq 1$.

● **مبرهنة كوشي التكاملية:**

إذا كانت f دالة تحليلية في مجال منته بسيط الاتصال D في المستوى العقدي وكان C منحنياً مغلقاً قابلاً للقياس في D نحصل على ما يلي: $\int f(z)dz = 0$.

● **صيغة القيمة الوسطى لكوشي:**

انظر وسط ـ مبرهنة القيمة الوسطى الثانية.

● **اختبار النسبة لكوشي:**

انظر نسبة ـ اختبار النسبة.

● **اختبار الجذر لكوشي:**

انظر جذر ـ اختبار الجذر.

كوكران، وليم غمّل — COCHRAN, WILLIAM GHAMMAL

إحصائي اسكتلندي عاش فترة طويلة في الولايات المتحدة الأمبركية حيث توفي فيها.

● **مبرهنة كوكران:**

لتكن $y_1, y_2, \ldots, y_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ويتبع كل واحد فيها للتوزيع الطبيعي المعياري.، أي أن المتجه العشوائي $\vec{y}' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ يتبع التوزيع الطبيعي المتعدد المتغير $N(\vec{0}, \vec{I})$ حيث يمثل المتجه الصفري $\vec{0}_{n \times 1}$ متجه المتوسطات وتمثل مصفوفة الوحدة $\vec{I}_n$ مصفوفة التغاير للتوزيع. ولتكن $Q_i = \vec{y}'\vec{A}_i\vec{y}$ أشكالاً تربيعية (لأجل $i = 1, 2, \ldots, k$) حيث A_i مصفوفة $(n \times n)$ رتبتها n_i، وليكن مجموع المربعات $\vec{y}'\vec{y}$ (أي $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{k} Q_i$$

إن الشرط $\sum_{i=1}^{k} n_i$ هو شرط لازم وكافٍ لكي تكون الأشكال التربيعية Q_i

$(i = 1,2,\ldots,k)$ مستقلة وتتبع توزيع مربع كاي بدرجات الحرية n_i. لهذه المبرهنة أهمية خاصة في موضوع تحليل التباين (أنظر تباين) الذي يتضمن دائمًا تجزئة مجموع المربعات الكلي $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ إلى مجاميع مربعات جزئية يكون من الضروري معرفة توزيعاتها قبل إجراء أية عملية استدلالية. وتبقى هذه المبرهنة صحيحة عندما يتبع $\overline{y}$ توزيع $N(\overline{\mu},I)$ حيث ستكون Q_i مستقلة وتتبع توزيع مربع كاي اللامركزي بوسائط لامركزية $\overrightarrow{\mu}'\overrightarrow{A}_i\overrightarrow{\mu}$ وبدرجات الحرية n_i. كما يمكن تعميمها إلى **مبرهنة كوكران متعدد المتغير** وهي: لتكن $\overrightarrow{y}_n,\ldots,\overrightarrow{y}_2,\overrightarrow{y}_1$ متجهات عشوائية مستقلة بعديتها $(p \times 1)$ وتتبع التوزيع الطبيعي متعدد المتغير $N(\overrightarrow{\mu_i},\overrightarrow{\Sigma})$ حيث $(p \times 1)\mu_i$ هي متجهات الوسط و $\overrightarrow{\Sigma}_{n\times n}$ هي مصفوفة التغاير. ولتكن المصفوفة

$$\overrightarrow{Y}_{n\times p} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{y}_1' \\ \overrightarrow{y}_2' \\ \vdots \\ \overrightarrow{y}_n' \end{pmatrix}$$

إذا كانت $\overline{Q}_i = \overrightarrow{Y}'\overrightarrow{A}_i\overrightarrow{Y}$ $(i = 1,2,\ldots,K)$ أشكالاً تربيعية مصفوفية حيث $(n \times n)\overrightarrow{A}_i$ مصفوفات رتبها n_i وتحقق

$$\overrightarrow{Y}'\overrightarrow{Y} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{y}_i\overrightarrow{y}'_i = \sum_{i=1}^{k} Q_i$$

فإن $n = \Sigma n_i$ هو شرط ضروري وكافٍ لكي تكون الأشكال التربيعية المصفوفية $\overline{Q}_i$ مستقلة وتتبع توزيعات ويشارت اللامركزية بدرجات حرية n_i ومصفوفة تغاير $\overline{\Sigma}$ ومصفوفات اللامركزية $\overrightarrow{M}\,\overrightarrow{A}_i\,\overrightarrow{M}$ (لأجل $i = 1,2,\ldots,k$) وحيث

$$M_{n\times p} = \begin{pmatrix} \overline{\mu_1}' \\ \overline{\mu_2}' \\ \vdots \\ \overline{\mu_n}' \end{pmatrix}$$

وإذا كان $\overline{\mu_1} = \overline{\mu_2} = \overline{\mu_2} = 0$ فإن Q_i تتبع توزيعات ويشارت المركزية.

انظر ويشارت؛ اختبار كوكران لتجانس التباين. انظر تجانس التباين.

كومبسكور، جان جوزيف انطوان ادوارد

COMBESCURE, JEAN JOSEPH ANTOINE EDUARD (1824-1889)

● **تحويل كومبسكور للمنحنى:**

هو تطبيق مستمر واحد لواحد من منحن في الفضاء إلى منحن آخر بحيث أن المماسات عند النقاط المتقابلة تكون متوازية.

ينتج عن ذلك توازي النواظم الرئيسية وثنائيات النواظم عند النقاط المتقابلة.

● **تحويل كومبسكور لنظام أسطح ثلاثي التعامد:**

هو تطبيق مستمر واحد لواحد من الفضاء الاقليدي ذي ثلاثة الأبعاد إلى نفسه بحيث تكون النواظم إلى أعضاء نظام أسطح متعامد موازية للنواظم على أعضاء نظام آخر وذلك إذا كان هذان النظامان موجودين عند نقاط متقابلة بالنسبة إلى التحويل.

كومر، ارنست ادوارد

KUMMER, ERNST EDUARD (1810-1893)

عالم رياضي ألماني في التحليل والهندسة ونظرية الأعداد والفيزياء ويعتبر بحق أبو الحساب المعاصر.

● **اختبار كومر للتقارب:**

لتكن Σa_n متسلسلة أعداد موجبة و $\{p_n\}$ هي متوالية أعداد موجبة. إذا وضعنا

$$c_n = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)p_n - p_{n+1}$$

فإن المتسلسلة Σa_n تكون متقاربة إذا كان يوجد عدد موجب وعدد N بحيث يكون $c_n > \delta$ إذا كان $n > N$. وتكون هذه المتسلسلة متباعدة إذا كانت المتسلسلة $\Sigma \frac{1}{p_n}$ متباعدة وكان يوجد عدد N بحيث $c_n \leq 0$ إذا كان $n > N$.

كوهين، بول جوزيف COHEN, PAUL JOSEPH (1934-   )

رياضي أميركي اشتغل بالتحليل والزمر والطوبولوجيا والمنطق. حاز على جائزة فيلدز عام 1966. أثبت استقلالية موضوعة الاختيار في نظرية المجموعات. كما أثبت استقلال فرض الملتحم عن موضوعة الاختيار ويكون بذلك قد أتم الحل السلبي لمسألة الملتحم (مسألة هيلبرت الأولى) حيث أن الجزء الأول من الحل كان قد تم على يد كورت غوديل بين عامي 1940-1938.

كوينتيليون QUINTILLION

هو عدد يساوي 10^{18} في فرنسا وأميركا بينما يساوي 10^{30} في انجلترا.

كبلر، يوهان KEPLER, JOHANN (1571-1630)

فلكي ورياضي وفيلسوف ولد في وورتيمبرغ، وعاش في أماكن مختلفة في أوروبا الغربية واستقر أخيراً في سيليسيا. وقد استخلص قوانين حركة الكواكب بالاعتماد على حسابات مضنية ومبدعة استمرت قرابة عشرين عاماً.

- **قوانين كبلر لحركة الكواكب:**

هي ثلاثة:

(1) إن مدارات الكواكب هي عبارة عن قطوع ناقصة تقع الشمس في إحدى بؤرتيها.

(2) إن المساحات المقطوعة خلال أزمات متساوية بواسطة أنصاف الأقطار المتجهية للكوكب تكون متساوية.

(3) إن مربع دور دوران الكوكب يتناسب مع مكعب المسافة الوسطى بين الكوكب والشمس.

هذا ويمكن استخراج هذه القوانين من تطبيق قانون التجاذب وقوانين نيوتن للحركة على الشمس وأحد الكواكب.

كيلوغرام KILOGRAM

وحدة قياس وزن وتساوي 1000 غرام وهي وزن قضيب من البلاتين محفوظ في باريس على أنه وحدة عيارية للنظام المتري للأوزان ويساوي تقريباً 2.2 ليبرة.

كيلومتر KILOMETER

وحدة قياس مسافة وتساوي ألف متر أو 3280 قدماً تقريباً.

كيلوواط KILOWATT

وحدة قياس القوة الكهربائية تساوي 1000 واط.

انظر واط.

- كيلوواط ساعي:

وحدة طاقة وتعادل 1000 واط مستخدمة في الساعة، وتعادل أيضاً $4/3$ قدرة حصانية تعمل لساعة واحدة.

كيهلر

- منطوى كيهلر:

هو منطوى M بعديته زوجية وعليه حقل موترات F من النمط (1,1) ومقاس ريماني g بحيث تتحقق الشروط التالية:

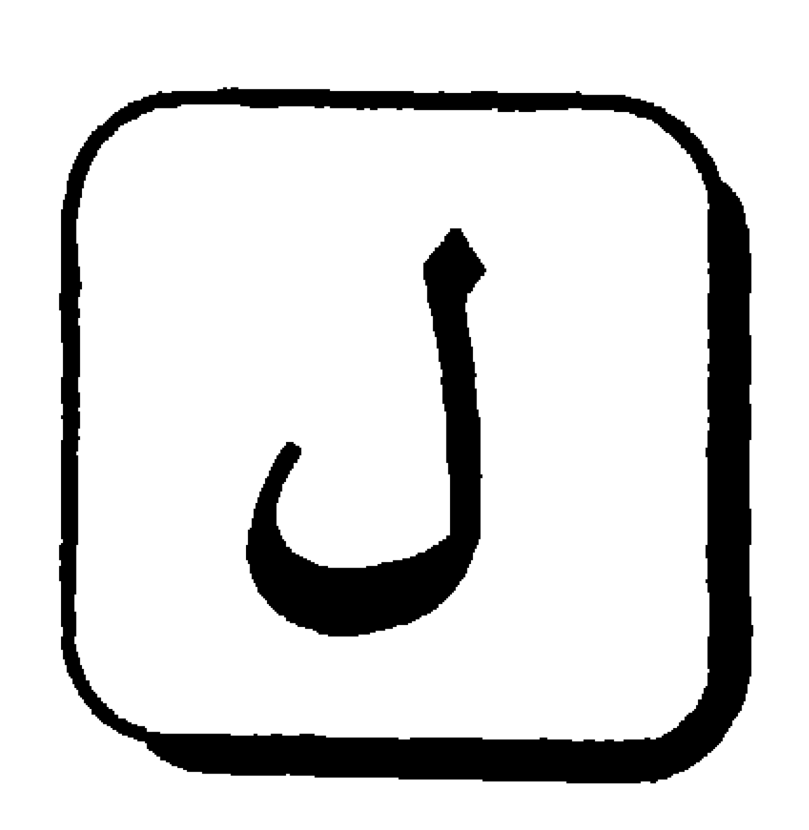
(1) $F^2X = -X$ لكل حقل متجهات X.

(2) $g(FX,FY) = g(X,Y)$ وذلك لأي حقلي متجهات.

(3) $(\Delta xF)Y = 0$ وذلك لأي حقلي متجهات X,Y

علمًا بأن ∇ هي الصلة الريمانية (انظر صلة).

ومن الجدير بالذكر أن F تكـون بنيـة قرب عقدية على M أي أن (M,F) يكون منطوياً قرب عقدي. وينص الشرط الثاني على أن g مقاس هرميتي أي أن المنطوى (M,g,F) هو منطو قرب الهرميتي وبذا يمكن القول بأن منطوى كيهلر ما هو إلا منظور قرب الهرميتي يحقق الشرط الثالث. والشرط الثالث يؤدي إلى أن F قابل للمكاملة وأن منطوى كيهلر هو منطو عقدي.



لابلاس، بيير سيمون

LAPLACE, PIERRE SIMON, MARQUIS DE (1749-1827)

هو عالم فرنسي في التحليل الرياضي والاحتمالات والفلك والفيزياء. ومن أبرز أعماله بحث ضخم جداً في الميكانيك السماوي، كما ساهم مساهمة فعالة في نظرية الاحتمالات والمعادلات التفاضلية.

● **تحويل لابلاس:**

نسمي الدالة f تحويل لابلاس للدالة g إذا كان $f(x) = \int e^{-xt}g(t)dt$، حيث تتم المكاملة على منحن في المستوى العقدي. وقد جرت العادة أن يقتصر طريق المكاملة على جزء المحور الحقيقي من 0 إلى $+\infty$.

● **تحويل لابلاس المعاكس:**

إذا كان $g(x)$ معرفاً من أجل $x>0$ وكان له عدد منته من الانقطاعات اللانهائية، وإذا كان التكامل $\int |g(t)|\, dt$ موجوداً من أجل أي فترة منتهية، وكان $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}g(t)dt$ متقارباً إطلاقاً من أجل $x>a$. عندئذٍ فإن لتحويل لابلاس هذا تحويلاً معاكساً يعطى بالعلاقة:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{xt} f(t)\, dt$$

وتأخذ قيمة التكامل السابق الشكل $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\,[g(x+h) + g(x-h)]$ إذا كانت الدالة g ذات تغير محدود بجوار x وكان $\alpha>a$.

انظر كذلك فوريه ــ تحويل فوريه.

● طريقة لابلاس لنشر معين:

انظر معين ــ طريقة لابلاس للنشر.

● معادلة لابلاس التفاضلية:

هي المعادلة التفاضلية الجزئية $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. وتحقق هذه المعادلة تحت شروط معينة كلاً من الطاقة المغناطيسية وطاقة الجاذبية والكهربائية الراكدة (الساكنة) والطاقة الكهربائية وطاقة السرعة وتصبح معادلة لابلاس في الاحداثيات العامة على النحو التالي:

$$g^{ij}V_{,i,j} = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial V}{\partial x^j})}{\partial x^i} = 0 .$$

حيث g_{ij} هو موتر مقاسي أساسي و g هو المعين $|g_{ij}|$ و g^{ij} هو $\frac{1}{g}$ مضروباً بمتعامل g_{ji} في g. أما $V_{,i,j}$ فهو المشتق الثاني الموافق للتغير للكمية السلمية V حيث طبقنا هنا **اصطلاح التجميع**. وتأخذ معادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية والكروية على الترتيب الشكلين:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

انظر ديريخليه ــ الخواص المميزة لدالة الطاقة.

لاتيني LATIN

● مربع لاتيني:

هو صفيف مربع مؤلف من n صفاً و n عموداً بحيث أن كل صف أو عمود هو عبارة عن تبديل لنفس العناصر المختلفةالتي عددها n ويكون المربع اللاتيني قطرياً إذا تحققت هذه الخاصة بالنسبة للقطرين أيضاً.

مثال:

1	3	2	4
4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3

مربع لاتيني قطري

1	2	3	4	5
4	3	1	5	2
5	1	4	2	3
2	4	5	3	1
3	5	2	1	4

مربع لاتيني

لا جوهري INESSENTIAL

نقول إن التطبيق F من الفضاء الطوبولوجي X إلى الفضاء الطوبولوجي y **لا جوهري** إذا كان f **متحاولاً** مع تطبيق آخر g يتكون مداه من نقطة وحيدة. (أنظر **تشوه** ــ تشوه مستمر). كما نقول إن التطبيق **جوهري** إذا لم يكن لا جوهرياً.

مثال (1): أي تطبيق من الدائرة (أو الكرة) بحيث لا يكون مداه كل الدائرة (أو كل الكرة) يكون لا جوهرياً.

مثال (2): أي تطبيق من فترة إلى دائرة أو من خلية (من n) إلى كرة (من n) يكون لا جوهرياً.

مثال (3): ويكون التطبيق من دائرة لأخرى جوهرياً إذا وإذا فقط كان **عدد اللف** لصورة الدائرة (بالنسبة لمركزها) مختلفاً عن الصفر.

لا دوراني IRROTATIONAL

- **المتجه اللادوراني في منطقة:**

هو متجه تكامله يساوي الصفر حول أي منحن مغلق قابل للاختزال في المنطقة.

ويكون **دوران** المتجه صفراً إذا وفقط إذا كان المتجه لا دورانياً، وإذا وفقط إذا كان المتجه تدرجاً لدالة سلمية (تسمى **بالكامن السلمي**) أي $\nabla\times F=0$ إذا وفقط إذا $F=-\nabla\phi$ لأجل كامن سلمي ما ϕ.

انظر دوران وتدرج.

لا راسب NONRESIDUE

انظر راسب.

لازم NECESSARY

- **شرط لازم:**

انظر شرط.

- **شرط لازم للتقارب:**

إن الشرط اللازم لتقارب المتسلسلة Σa_n هو $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ولكن هذا الشرط ليس كافياً أي أن تحققه لا يؤدي إلى تقارب المتسلسلة.

مثال: مع أن الحد العام $a_n = \frac{1}{n}$ في المتسلسلة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ ينتهي إلى الصفر عندما $n \to \infty$ فإن هذه المتسلسلة متباعدة وتسمى **المتسلسلة التوافقية**.

انظر **كوشي** ــ شرط كوشي للتقارب.

لازمة COROLLARY

اللازمة هي مبرهنة تنتج بشكل واضح عن برهان مبرهنة أخرى وغالباً لا تحتاج اللازمة إلى برهان لها. إنها حصيلة ثانية أو نتيجة ثانوية لمبرهنة أخرى.

لاعب PLAYER

شخص واحد أو عدة أشخاص يتضامنون بشكل شخص واحد للعب مباراة معينة. وفي **مباراة صفرية المجموع** بلاعبين يكون هناك **اللاعب المعظم واللاعب المصغر**. اللاعب المعظم هو اللاعب الذي نعتبر بأن كل الدفعات الجارية في المباراة تدفع له (الدفعة المدفوعة له من قبل اللاعب الآخر تعتبر دفعة موجبة والدفعة التي يدفعها هو إلى اللاعب الآخر تعتبر دفعة سالبة).

أما اللاعب المصغر فهو اللاعب الذي نعتبر بأن كل الدفعات الجارية في المباراة تدفع من قبله (الدفعة المدفوعة من قبله تعتبره موجبة والدفعة التي تدفع له تعتبر سالبة).

انظر مباراة؛ وانظر جزاء.

لاغرا، إدموند نيكولاس LAGUERRE, EDMOND NICOLAS (1834-1886)

هو عالم فرنسي في الهندسة والتحليل.

- **دوال لاغرا المتشاركة:**

هي جميع الدوال من الشكل $y = e^{-1/2x} \cdot x^{1/2(k-1)} \cdot L_n^k(x)$. حيث $L_n^k(x)$ هو كثير حدود لاغرا المتشارك. والدالة هي حل المعادلة التفاضلية:

$$xy'' + 2y' + [n - \tfrac{1}{2}(k-1) - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{4x}(k^2-1)]y = 0$$

- **كثيرات حدود لاغرا:**

نعرف كثيرات حدود لاغرا بالعلاقة $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. وتتحقق من أجل جميع قيم n العلاقتان:

$$(1 + 2n - x)L_n - n^2 L_{n-1} - L_{n+1} = 0$$

$$(1-t)^{-1} \exp \frac{-xt}{(1-t)} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x)t^n/n!$$

ويحقق كثير حدود لاغرا معادلة لاغرا التفاضلية بوضع $\alpha = n$ في تلك المعادلة. كما أن الدوال $e^{-x}L_n(x)$ هي دوال متعامدة في الفترة $(0, \infty)$.

- **كثيرات حدود لاغرا المتشاركة:**

هي كثيرات حدود L_n^k معرفة بالعلاقة $L_n^k = \dfrac{d^k}{dx^k} L_n(x)$، حيث $L_n(x)$ هو كثير حدود لاغرا. وتجدر الإشارة إلى أن L_n^k يحقق المعادلة التفاضلية:

$$xy'' + (k + 1 - x)y' + (n - k)y = 0$$

- **معادلة لاغرا التفاضلية:**

وهي المعادلة التفاضلية $xy'' + (1-x)y' + \alpha y = 0$ حيث α هو عدد ثابت.

هو عالم رياضي فرنسي عظيم في التحليل والجبر ونظرية الأعداد والاحتمالات والفيزياء والفلك. وقد ساهم بشكل خاص في حسبان التغيرات والميكانيك التحليلي والفلك.

- **دالة لاغرانج:**

انظر **طاقة** ـ طاقة حركية.

- **شكل لاغرانج لباقي متسلسلة تايلور:**

انظر **تايلور** ـ مبرهنة تايلور.

- **صيغة لاغرانج للاستكمال:**

وهي صيغة من أجل إيجاد تقريب لقيمة إضافية للدالة داخل فترة معطاة للمتغير المستقل، وذلك عندما نعلم بعض قيم الدالة في بعض النقط داخل هذه الفترة. وتعتمد هذه الصيغة على تعيين كثير حدود درجته أقل بواحد من عدد النقط التي نعرف عندها قيمة الدالة، ويتم تعيين معاملات كثير الحدود باستخدام النقط المعلومة. ومن ثم فإن كثير الحدود الذي نحصل عليه يعتبر تقريباً للدالة. وهكذا إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي قيم x التي توافقها قيم للدالة هي $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ فإن صيغة لاغرانج تأخذ الشكل:

$$f(x) = \frac{f(x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} +$$

$$+ \frac{f(x_2)\,(x - x_2)\,(x - x_3)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_n)} + \ldots \quad (\text{n حدا}).$$

- **طريقة ضوارب لاغرانج:**

وهي طريقة تستخدم لإيجاد القيمة العظمى والصغرى لدالة بعدة متغيرات عندما تكون لدينا علاقات أخرى بين المتغيرات. فإذا كان المطلوب مثلاً إيجاد القيمة العظمى لمساحة مستطيل محيطه ثابت ويساوي k فإنه ينبغي إيجاد القيمة العظمى للدالة xy بشرط أن يكون: $2x + 2y - k = 0$

تعتمد طريقة لاغرانج لحل هذه المسألة على تشكيل الدالة:

$$u = xy + t(2x + 2y - k)$$

حيث t هو مجهول يحذف أخيراً. ثم حل المعادلات:

$$2x + 2y - k = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

وبشكل عام إذا كانت لدينا الدالة $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ في n متغيراً ترتبط بعلاقات مختلفة عددها h هي $\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, \ldots, \phi_h = 0$ وكان المطلوب إيجاد قيم المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ التي تجعل الدالة f أعظمية أو أصغرية، فإننا نشكل الدالة المساعدة:

$$u = f + t_1\phi_1 + t_2\phi_2 + \ldots + t_h\phi_h$$

ثـم نحـل المعـادلات $\phi_1 = 0$ و $\phi_2 = 0, \ldots \phi_h = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$ في المجاهيـل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عـلى أن نعتبـر $t_1, t_2, \ldots, t_n$ مجاهيل إضافية يمكن حذفها.

● **مبرهنة لاغرانج:**

إذا كانت G هي زمرة جزئية من زمرة H ذات مرتبة منتهية فإن مرتبة G تقسم مرتبة H.

لا متجول — NON WANDERING

ليكن (X,R,π) نظاماً ديناميكياً، نقول إن النقطة $x \in X$ نقطة **لا متجولة** إذا كـان لكـل جـوار U للنقـطة x ولكـل $t \in R$ يـوجـد $T>t$ بحيث يكـون $\pi(U,T) \cap U \neq \phi$. وتكون النقطة x **لا متجولة** إذا وفقط إذا كان $x \in J^+(x)$ (أو $x \in J^-(x)$) (حيث $J^+(x)$ هي **مجموعة إطالات النهايات الموجبة**.

انظر **مجموعة إطالات النهايات** إذا وفقط إذا كان $D^+(x) = D^-(x)$ حيث $D^+(x)$ {$D^-(x)$, } **مجموعة الاطالات الموجبة والسالبة** للنقط x على الترتيب.

ويمكن البرهنة على أنه إذا كانت $y \in L^{+}(x)$ فإن y تكون نقطة لا متجولة حيث $L^{+}(x)$ هي مجموعة نهايات x الموجبة. وإذا لم تكن النقطة x **لا متجولة** فإنها تسمى **متجولة**. ومن الواضح هنا أن كل نقطة راقدة أو دورية أو دورية تقريباً تكون لا متجولة.

انظر راقدة ودورية ودورية تقريباً.

لا متشابه — DISSIMILAR

الحدود اللامتشابهة:

هي الحدود التي لا تحتوي على نفس القوى أو العوامل المجهولة. فمثلاً الحدان 2x و 5y حدان لا متشابهان وكذلك الحدان 2x و $2x^2$.

انظر جمع – جمع الحدود المتشابهة في الجبر.

لا متصل — DIS CONNECTED

- **المجموعة اللامتصلة:**

تكون المجموعة A لا متصلة إذا وجدت مجموعتان غير خاليتين U و V بحيث يكون $A = U \cup V$ (1) و (2) $\bar{U} \cap V = \phi$ و $U \cap \bar{V} = \phi$ ويسمى $A = U \cup V$ بانفصال A.

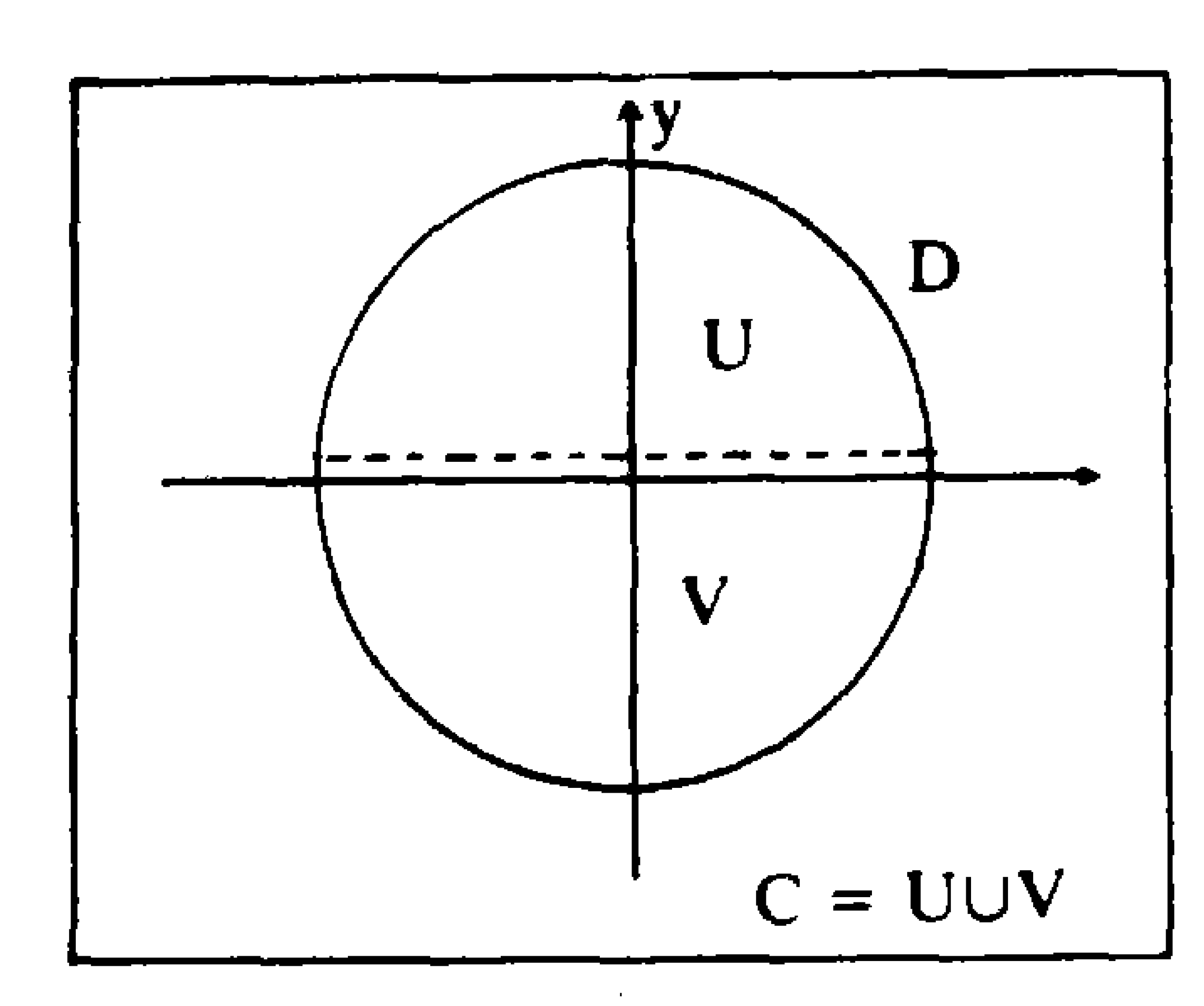
مثال (1): الفترة $I = [a,b]$ كمجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية تكون متصلة. وإذا حذفت من I نقطة c بحيث $a<c<b$ فإن المجموعة الناتجة $B = [a,c) \cup (c,b]$ تكون لا متصلة لأن:

$$\phi = [a,c] \cap (c,b] = \overline{[a,c)} \cap (c,b]$$

$$\phi = [a,c) \cap [c,b] = [a,c) \cap \overline{(c,b]}$$

مثال (2): في المستوى R^2 يكون القرص $D = \{ (x_0,y) \mid |x_0 - y| <1\}$، حيث $x_0 = (0,0)$, $y = (y_1,y_2)$ متصل. ويبقى القرص متصلاً إذا حذفت من داخله نقطة أو عدد منته من النقاط بخلاف الحالة في المثال رقم (1). أما إذا

حذفنا القطعة المستقيمة $\{(x_0,y)| \; |y| < 1\}$ من القرص D فإن المجموعة الناتجة C تكون لا متصلة كما هو مبين في الشكل المرافق.



لاحظ أن $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = |x_0 - y|$

ونعطي هنا المبرهنة التالية:

إذا كانت المجموعة اللامتصلة $A = U \cup V$ مفتوحة فإن كلاً من U و V مفتوحة وإذا كانت A مغلقة فإن كلاً من U و V مغلقة. وتسمى المجموعة A **لامتصلة كلياً** إذا لم تحتو A على أية مجموعة جزئية متصلة بها أكثر من نقطة واحدة، وبعبارة أخرى تكون A لامتصلة كلياً إذا كانت مركباتها مجموعات أحادية مثل مجموعة الأعداد المنطقة ومجموعة الأعداد الصحيحة.

كما تسمى A **لامتصلة بتطرف** إذا كانت غلاقة كل مجموعة مفتوحة في A مجموعة مفتوحة. وهذا يكافىء القول بأن غلاقتي أي مجموعتين منفصلتين ومفتوحتين في A تكونان منفصلتين أيضاً. والجدير بالذكر أن كل فضاء لا متصل بتطرف وهاوسدورف يكون لامتصلاً كلياً.

لا متعد — INTRANSITIVE

● **العلاقة اللامتعدية**:

انظر متعد.

لا متغير — INVARIANT

● **المجموعة اللامتغيرة (إيجاباً)**:

ليكن (X,R,π) نظاماً ديناميكياً (انظر **نظام ديناميكي**) ولتكن M مجموعة جزئية من X.

نقول ان M لا متغيرة إيجاباً إذا احتوت M على المدارات الموجبة جميع نقطها، أي أن $C^{+}(x)\subset M$ لكل $x\in M$. وبنفس الطريقة نعرف المجموعة اللامتغيرة سلباً. وتكون M لا متغيرة إذا كانت لا متغيرة إيجاباً وسلباً في آن واحد. وإذا كانت $\{M_i\}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X بحيث تكون كل منها لا متغيرة إيجاباً فإن كلاً من $\cup M_i$ و $\cap M_i$ تكون لا متغيرة إيجاباً ونفس الشيء ينطبق على اللامتغيرة سلباً واللامتغيرة.

وإذا كانت المجموعة M لامتغيرة (إيجاباً) فإن داخلها يكون لامتغيراً إيجاباً. وكذلك تكون غلاقتها. أما متممة M فتكون لا متغيرة سلباً. وتحتوي كل خلية بعديتها n ولا متغيرة إيجاباً عى نقطة راقدة بشرط أن تكون الخلية متماثلة باستمرار مع كرة مغلقة في R^n.

INVARIANT — لا متغير

● **لا متغير معادلة جبرية:**

هو تعبير جبري يحتوي على المعاملات التي تبقى بدون تغيير في القيمة عند القيام بانسحاب أو تدوير للمحاور. فمثلاً في الشكل التربيعي العام:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0$$

تكون الكميات $a + c$ و $b^2 - 4ac$ والمميز.

$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2a & b & d \\ b & 2c & e \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$ كميات لا متغيرة للمعادلة.

● **الخاصية اللامتغيرة:**

هي خاصية لدالة أو لتشكل أو لمعادلة لا تتغير تحت تأثير تحويل معين. فمثلاً قيمة النسبة المتصالبة لا متغيرة بالنسبة للإسقاط.

انظر موتر.

● **الزمرة اللامتغيرة:**

هي نفس الزمرة الجزئية المعتدلة.

● **مسألة الفضاء الجزئي اللامتغير:**

نقول ان المجموعة الجزئية L من فضاء بناخ X **فضاء جزئي لا متغير تحت** تأثير المؤثر T إذا كانت L فضاء جزئياً خطياً ومغلقاً بحيث يكون $Tx \epsilon L$ لكل $x \epsilon L$.

والمسألة المطروحة هنا تتعلق بتحديد أي من المؤثرات الخطية المحدودة T على فضاء بناخ X والتي لها **فضاء جزئي لا متغير**. ومن أنه يوجد للمؤثرات T فضاء جزئي لا متغير إذا كان هناك مؤثر متراص S يستبدل مع T وبحيث لا يقابل كل X على الصفر. كما أنه من المعلوم أنه يوجد فضاء بناخ لا انعكاسي X ومؤثر خطي محدود T على X ليس له أية فضاءات جزئية لا متغيرة.

● **مثيل اللامتغير** (إحصاء):

إذا كان لكل تحويل من النوع $Y = a + bx$ لمتغير عشوائي X يوجد متتالية من الوسطاء $\{\upsilon_n\}$ مرتبطة بـ X ومتتالية من الوسطاء $\{W_n\}$ مرتبطة بـ $W_n = b^n \upsilon_n Y$. إذا كان $n \geq 2$ فإننا نقول إن هذه الوسطاء **مثيلة اللامتغير**.

وكأمثلة لمثيل اللامتغير نورد العزوم المركزية والمتراكمات حول الوسط.

لا منته INFINITE

لتكن f دالة و a نقطة بحيث يحتوي كل جوار لها على نقطة في مجال f مختلفة عن a. فإننا نقول إن الدالة f تصبح لا منتهية عندما تقترب x من a إذا كان لكل عدد c هناك جوار U للنقطة a بحيث $|f(x)| > C$ إذا كانت $x \neq a$ في مجال f ونقطة في U. وتكون f لامنتهية موجبة إذا كان $f(x) > c$ ولا منتهية سالبة إذا كان $f(x) < c$. وهذه تكتب عادة على الصورة:

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

وتنطبق هذه التعريفات إذا كانت a أحد الرموز ∞ أو ∞- إذا عرفنا

جوار ∞ على أنه المجموعة المكونة من العناصر x بحيث $x>M$ حيث M عدد معين ويعرف جوار ∞- بطريقة مماثلة.

انظر محدد ـ نظام الأعداد الحقيقية المحدد؛ وانظر كذلك غير محدود ـ الدالة غير المحدودة.

● **الفرع اللامنتهي من المنحنى:**

هو جزء من المنحنى لا يمكن إحاطته بدائرة (منتهية).

● **العشري اللامنتهي:**

انظر عشري ـ النظام العشري للأعداد.

● **التكامل اللامنتهي:**

هو تكامل مثل $\int_{\infty}^{\infty} \frac{dp}{p^2}$ و $\int_{-\infty}^{0} xdx$ و $\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^3}$. ولإيجاد قيمة التكامل اللامنتهي فإننا نوجد نهاية التكامل عندما تقترب نهاية أو نهايات التكامل إلى ∞ أو ∞-. ويكون التكامل معرفاً إذا كانت هذه النهاية معرفة، مثال:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{p^2} = \lim_{h\to\infty} \int_{-h}^{h} \frac{dp}{p^2} = \operatorname{Lim}_{h\to\infty} \left[-\frac{2}{h} \right]$$

$$\int_{-\infty}^{0} xdx = \operatorname{Lim}_{h\to\infty} \int_{-h}^{0} xdx = \operatorname{Lim}_{h\to\infty} \left[-\frac{h^2}{2} \right] = -\infty$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \operatorname{Lim}_{h\to\infty} \int_{1}^{h} \frac{dt}{t^3} = \operatorname{Lim}_{h\to\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{h^2} \right] = \frac{1}{2}$$

● **النهاية اللامنتهية:** انظر لامنته.

● **النقطة اللامنتهية:** هي نفس النقطة المثالية.

● **الجداء اللامنتهي:** انظر جداء.

● **الجذر اللامنتهي:** انظر جذر ـ الجذر اللامنتهي للمعادلة.

● **المتتالية اللامنتهية:** انظر متتالية.

● **المتسلسلة اللامنتهية**: انظر متسلسلة.

● **المجموعة اللامنتهية**:

هي مجموعة غير منتهية أي تحتوي على عدد غير محدود من العناصر. وبصورة أدق فإن المجموعة اللامنتهية تعرف بأنها تلك التي يوجد تقابل بينها وبين مجموعة جزئية فعلية منها.

مثال: مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة تعطينا مثالاً لمجموعة منتهية حيث يمكن وضعها في تقابل مع مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة. وكذلك فإن مجموعة الأعداد المنطقة تعطي مثالاً آخر لمجموعة لا منتهية حيث يمكن وضعها في تقابل مع مجموعة الأعداد الصحيحة.

لامي، غابرييل **LAME, GABRIEL (1795-1870)**

هو عالم فرنسي في الرياضيات التطبيقية بالإضافة إلى كونه مهندساً.

● **ثابتا لامي**:

هما الثابتان الموجبان μ,λ اللذان أدخلهما لامي ليصفا وبشكل كامل الخواص المرنة لجسم متخاصص. ويرتبطان بمعامل يونغ E وبنسبة بواسون σ بالعلاقتين:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad \lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$$

ويسمى μ عادة **بمعامل الصلابة** أو **معامل القص** وهو يساوي النسبة بين إجهاد القص وتغير الزاوية الناجم عن إجهاد القص.

لا نهاية **INFINITY**

● **يقترب من اللانهاية**: انظر **لا منته**.

● **خط على اللانهاية**: انظر خط ــ خط على اللانهاية.

● **مرتبة اللانهايات**:

انظر **مقدار** ــ مرتبة المقدار.

● **نقطة اللانهاية**:

(1) انظر **مثالي ــ النقطة المثالية**.

(2) انظر **محدد ــ نظام الأعداد الحقيقية المحدد**.

(3) **نقطة اللانهاية في المستوى العقدي**: هي نقطة تضاف للمستوى العقدية كي يصبح متراصاً. ويمكن النظر للمستوى العقدي على أنه كرة مثقوبة عند القطب الشمالي. ويمكن تعريف تطبيق متزاو بين هذه الكرة والمستوى العقدي باستخدام **الإسقاط المجسادي** حيث يقابل قطب الإسقاط (القطب الشمالي) لنقطة اللانهاية.

لا وسيطي NONPARAMETRIC

● **إحصاء لا وسيطي**:

فرع من علم الإحصاء يتعلق بالطرق الإحصائية (سواء في نظرية التقدير أو نظرية الاختبارات الإحصائية) التي لا تعتمد في تنفيذها وصفاتها على الافتراضات التي تخص نوع التوزيع الاحتمالي الذي نسحب منه العينة العشوائية. والطرق اللاوسيطية تخدم عائلة كبيرة من التوزيعات الاحتمالية (اعتيادياً العائلة ذات التوزيعات المستمرة) وهذا يعكس الطرق الإحصائية التقليدية التي تعتمد على افتراض أن التوزيع الاحتمالي المسحوب منه العينة هو توزيع طبيعي.

انظر **طبيعي ــ توزيع طبيعي**؛ وانظر **ويلكوكسن ــ** اختبار الرتبة المؤشرة واختبار مجموع الرتب.

لايبنيتز، غوترفيلد ويلهلم

LEIBNIZ, GOTTERIED WILHELM VON)1646-1716)

هو عالم ألماني عظيم في التحليل وعلم التوافقات والمنطق وهو منشىء علم الحسبان وكثير من رموزه. كما أنه أول من اخترع آلة ميكانيكا للضرب.

انظر **أصغري الزمن**.

● مبرهنة (أو علاقة) لايبنيتز:

وهي علاقة تمكننا من إيجاد المشتق من المرتبة n لجداء دالتين وتكتب هذه العلاقة على الصورة:

$$D^n(uv) = vD^nu + nD^{n-1}\,uDv + \frac{1}{2}\,n(n-1)D^{n-2}\,uD^2v + \dots + uD^nv$$

ولا بد أن نلاحظ أن المعاملات الثابتة هنا هي معاملات منشور العبارة $(u+v)^n$ كما أن $D^nu = \frac{d^n}{dx^n}u = u^{(n)}$، أي المشتق من المرتبة n للدالة u.

ونحصل بصورة مشابهة على المشتق من المرتبة n لجداء دوال u_i عددها k أما المعاملات الثابتة فنحصل عليها من معاملات منشور المقدار:

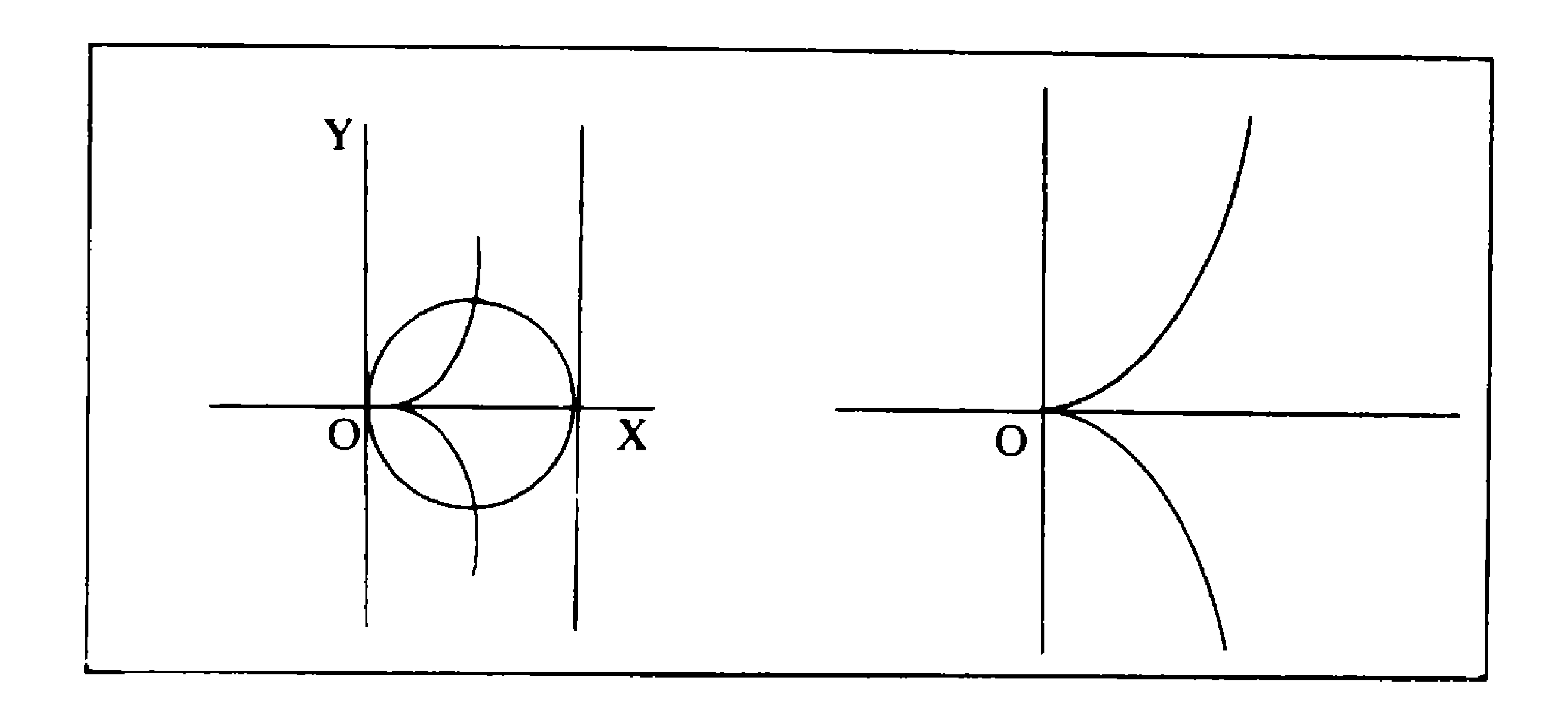
$$(u_1 + u_2 + \dots + u_k)^n$$

لُبّ

بما أن اتحاد مجموعات أي عائلة من المجموعات المتوازية هو مجموعة متوازية (أنظر متوازن) لذا فإن كل مجموعة جزئية A في فضاء متجهات متجهي (أو عقدي) E تحتوي على مجموعة جزئية B أعظمية ومتوازية. ومن الواضح أن B هي اتحاد كل المجموعات الجزئية المتوازنة في A نسمي المجموعة B بأنها اللب المتوازن للمجموعة A.

لبلابـي CISSOID

(ويسمى أيضاً لبلابـي ديوكليس) وهو المحل الهندسي في المستوى لمسقط العمود النازل من رأس القطع المكافىء إلى مماس متغير. المعادلة القطبية للبلابـي هي $a>0$ ثابت $r = 2a \tan \Phi \sin \Phi$. أما معادلته الديكارتية فهي $y^2(2a - x) = x^3$. ولهذا المنحنى قرنة من النوع الأول عند نقطة الأصل ويكون محور x هو المماس المضاعف. وكان ديوكليس أول من درس اللبلابـي وذلك حوالي 200 قبل الميلاد.



LITER, LITRE **لتر**

اللِيتر هو وحدة لقياس السعة ويساوي ديسمتراً مكعباً واحداً كما يساوي تقريباً 61,026 إنشاً مكعباً.

INSTANTANEOUS **لحظي**

● **التسارع اللحظي، السرعة العددية اللحظية، والسرعة اللحظية:**
انظر تسارع وسرعة عددية وسرعة.

PLASTICITY **لدونة**

● **نظرية اللدونة:**
هي نظرية سلوك المواد خارج مجال مرونتها.

PLAY **لعبة**

● **لعبة في مباراة:**
هي أي إجراء خاص من البداية حتى نهاية المباراة.
انظر مباراة؛ انظر نقلة.

● **عدد اللف :**

هو عدد المرات التي يمرها منحنى مغلق في المستوى عابراً نقطة معينة وبالاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة). أما التعريف الدقيق فهو ما يلي:

لنأخذ C منحنياً مغلقاً في المستوى بحيث يكون صورة لدائرة تحت تأثير تحويل مستمر. هذا يعني أن للمنحنى C معادلات وسيطية من النمط:

$$x = u(t)\ , \qquad y = v(t) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

حيث u,v دالتـان مستمـرتـان، و $u(0) = u(1), v(0) = v(1)$ أو أن للمنحنى C معادلة من النمط $w = f(z)$ و $|z| = 1$ حيث z,w عددان عقديان و f دالة مستمرة. لتكن P نقطة ليست على C، ولنأخذ الأعداد $\{t_i\}$ التي تحقق:

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$$

ولتكن Q_i النقطة التي يكون الوسيط عندها t_i $(i = 1,\ldots,n)$، فإنه يوجد عدد E بحيث تأخذ الكمية $\frac{1}{2\pi} \sum_{1}^{n} \theta_i$ القيمة $n(C,P)$ التي لا تعتمد على اختيارنا للأعداد $\{t_i\}$ وذلك إذا كان $t_i - t_{i-1} < E$ وذلك لكل i. أما θ_i فهي الزاوية (بالراديان) من الخط PQ_{i-1} إلى الخط PQ_i. هذا العدد $n(C,P)$ هو عدد صحيح وهو **عدد اللف** للمنحنى C بالنسبة إلى النقطة P، أو هو دليل P بالنسبة إلى C. عدد اللف لمنحنى لا يتغير إذا تعرض المنحنى لتشوه مستمر بحيث لا يمر المنحنى بالنقطة P. مثلاً إذا كان $P(z)$ كثير حدود من الدرجة n وكان $P(0) \neq 0$ وكانت C_k صورة الدائرة $|z| = k$ تحت تأثير التطبيق $w = P(z)$، فإننا إذا أخذنا k كبيراً بشكل كاف فإن عدد اللف للمنحنى C_k بالنسبة لنقطة الأصل هو r وإذا أخذنا K صغيراً بما فيه الكفاية فإن عدد اللف للمنحنى C_k بالنسبة إلى نقطة الأصل يكون صفراً. وبما أنه يمكن تشويه هذه المنحنيات إلى بعضها استمرارياً (وذلك بترك k تتغير استمرارياً) فإنه لا بد من وجود قيمة تأخذها k ويمر C_k عندها بنقطة الأصل وينتج عن ذلك وجود قيمة للمتغير z بحيث يكون $P(z) = 0$ وهذا يعطي برهاناً لمبرهنة الجبر الأساسية.

إذا كانت P العدد العقدي a وكان المنحنى C معرفاً بواسطة $w = f(z)$ حيث إن f قابلة للمفاضلة جزءاً جزءاً فإن:

$$n(c,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z - a}$$

لوباتشيفسكي، نيكولاي إيفانوفيتش

LOBACHEVSKI, NIKOLAI IVANOVICH (1793-1856)

عـالم روسي عظيم في الهـندسة وهـو أول من ابتدع نـظام الهندسـة اللا إقليدية.

انظر هندسة ـ هندسة لا إقليدية.

لوبيتال، غيليوم فرانسوا انطوان

LHOPITAL (1661-1704)

هو عالم فرنسي في التحليل والهندسة. وهو أول من كتب كتاباً في حسبان التفاضل.

انظر أصغري الزمن.

● **قاعدة لوبيتال:**

(ننوه هنا إلى أن المكتشف الأول لهذه القاعدة هو (جون برنـولي) هي قاعدة نتمكن بواسطتها من إيجاد قيمة أشكال عدم التعيين. وهكذا إذا كان

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x) = 0$ أو $\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |F(x)| = +\infty$،

فإن:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

حيث f' و F' هما مشتقا الدالتين f و F.

مثال: ليكن $f(x) = x^2 - 1,\ F(x) = x - 1,\ a = 1$ عندئذٍ فإن:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} F(x) = 0$$

وهو أحد أشكال عدم التعيين للنهاية $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{F(x)}$. ولإزالة عدم التعيين هذا نستخدم قاعدة لوبيتال فنجد:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = 2$$

ويتم برهان قاعدة لوبيتال بعد أن نفترض وجود جوار U للنقطة a تكون فيه F و a قابلتين للمفاضلة. (ليس بالضرورة أن يتحقق هذا الشرط عند a).

كما يجب ألا توجد أي نقطة $c \epsilon U$ بحيث $F'(c) = f'(c) = 0$.

انظر وسط ـ مبرهنة القيمة الوسطى.

لوجاندر، أدريان ماري **LEGENDER, ADRIEN MARIE (1752-1833)**

هو عالم فرنسي في التحليل ونظرية الأعداد.

● **دوال لوجاندر المتشاركة:**

هي الدوال المعرفة بالعلاقة:

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} p_n(x)$$

حيث $p_n(x)$ هو كثير حدود لوجاندر. ونشير هنا إلى أن الدالة $p_n^m(x)$ هي حل المعادلة التفاضلية:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + [n\,(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2}]\, y = 0$$

انظر توافقي ـ توافقي كروي، توافقي منطقي.

● **دوال لوجاندر من النوع الثاني:**

أنظر نويمان ف. ي.

● **لمز لوجاندر (c/p):**

إذا كان باقي قسمة العدد x على β هو α فإننا نكتب $x \equiv \alpha \pmod \beta$. مثلاً $13 \equiv 1 \pmod 2$ ونسمي α راسباً خطياً للعدد β. أما إذا كان لدينا x بحيث $x^2 \equiv \alpha \pmod \beta$ فإننا نسمي α راسباً تربيعياً للعدد β. فإذا كان c عدداً صحيحاً

وكان p عدداً أولياً فردياً فإن الرمز (c/p) يساوي 1 إذا كان c راسباً تربيعياً للعدد الأولي الفردي p أي إذا كان يوجد حل للمطابقة $x^2 \equiv c(\mathrm{mod}\ p)$. أما إذا لم يكن لهذه المعادلة أي حل، فإن (c/p) يساوي -1.

مثال: $(6/9) = 1$ لأنه يوجد للمطابقة $x^2 \equiv 6(\mathrm{mod}\ 19)$ حل هو مثلاً 196. بينما $(39/47) = -1$ لأنه لا يوجد حل للمطابقة $x^2 = 39(\mathrm{mod}\ 37)$.

● **شرط لوجاندر اللازم (حسبان التغيرات):**

هو الشرط $f_{y'y'} \geq 0$ الذي يجب أن يتحقق إذا كانت الدالة y تُصغر المقدار

$$\int_{x1}^{x2} f(x,y,y')dx$$

انظر **حسبان التغيرات، معادلة أويلر، فايرشتراس ـ شرط فايرشتراس** اللازم.

● **كثيرات حدود لوجاندر $P_n(x)$:**

هي معاملات h في العبارة $(1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)h^n$ وهكذا فإن:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

وتحقق كثيرات حدود لوجاندر P_n المعادلة التفاضلية:

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n + 1)\ P_n(x), \quad n \in N$$

التي تسمى عادة **معادلة لوجاندر التفاضلية**. كما تحقق كثيرات حدود لوجاندر العلاقتين:

$$(n + 1)\ P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial g^n} \left(\frac{1}{r}\right)$$

من أجل جميع قيم $n \in N$ حيث $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ، $\cos\theta = \frac{z}{r}$. وتشكل **مجموعة كثيرات حدود لوجاندر مجموعة تامة من الدوال المتعامدة في** الفترة $(-1, 1)$. تسمى كثيرات حدود لوجاندر أحياناً معاملات لوجاندر.

أنظر رودريك ـ علاقة رودريك؛ انظر شلافلي ـ تكاملي شلافلي.

● **معادلة لوجاندر التفاضلية:**

هي المعادلة التفاضلية:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

لوران، بول ماتيو هرمان

LAURENT, PAUL MATTHIEU HERMANN (184-1908)

هو عالم فرنسي مشهور بمتسلسلته التي تعمم متسلسلة تايلور.

● **نشر لوران لدالة تحليلية في متغير عقدي:**

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في الطوق الدائري $a<|z-z_0|<b$ فإن الدالة $f(z)$ يمكن أن تمثل بمتسلسلة قوى ذات اتجاهين داخل هذا الطوق وتأخذ هذه المتسلسلة الشكل: $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

وتسمى هذه المتسلسلة نشر لوران أو متسلسلة لوران للدالة f حول z_0.

أما المعاملات a_n فيتم تعيينها من العلاقة:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} {}_C\int (\zeta - z_0)^{-n-1} f(\zeta)\, d\zeta$$

حيث C هو منحن مغلق بسيط قابل للقياس وواقع بكامله في الطوق المشار إليه سابقاً ويحيط بالدائرة $|z - z_0| = a$.

لورنتز، هنريك انطون

LAURINTZ, HANRIQ ANTOUN (1853-1928)

● **شكل لورنتز:**

هو بالأصل شكل ثنائي الخطية ومتناظر على R^4 ومعرف بواسطة:

$$f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - C\, x_4y_4$$

حيث أن c عمود حقيقي موجب و $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$

و $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. أما حديثاً فيعرف شكل لورنتز بأنه الشكل المتناظر الثنائي الخطية على R^n والذي يمكن كتابته على الشكل:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_{n-1}^2 - dx_n^2$$

- **زمرة لورنتز:**

هي زمرة التماثلات الخطية الذاتية على R والتي تحفظ شكل لورنتز.

- **منطو لورنتز:**

هو منطو تفاضلي شبه ريماني ويأخذ فيه المقاس شكل لورنتز في فضاء المماس عند كل نقطة.

لوزين، نيكولاي نيكولاييفيتش

LUZIN (or LUSIN), NIKOLAI NIKOLAEVICH (1883-1950)

عالم روسي في التحليل والطوبولوجيا وعلم المنطق.

- **مبرهنة لوزين:**

لتكن f دالة معرفة على فضاء الأعداد الحقيقية R أو على فضاء من n بعداً، بحيث تكون هذه الدالة منتهية تقريباً في كل مكان. وقابلة للقياس. عندئذٍ يوجد مقابل أي عدد موجب ε دالة g مستمرة على R (أو الفضاء) بحيث يكون $f(x) = g(x)$ من أجل جميع النقط ما عدا مجموعة من النقط قياسها أقل من ε.

لوغاريتم

LOGARITHM

لوغاريتم عدد موجب (أو عقدي) M هو الأس x الذي نرفع إليه عدداً آخر a بحيث $a^x = M$. ونسمي a **أساس اللوغاريتم**. وبما أن $100 = 10^2$ $5^3 = 125$, فإن العدد 2 هو لوغاريتم العدد 100 بالنسبة للأساس 10، كما أن العدد 3 هو لوغاريتم العدد 125 بالنسبة للأساس 5. ونعبر عن ذلك بالكتابة $\text{Log}_{10}100 = 2$, $\text{Log}_5 125 = 3$ وبصورة مشابهة نكتب $\text{Log}_{10}0.1 = -1$, $\text{Log}_9 27 = \frac{3}{2}$.

● **خواص اللوغاريتم الأساسية:**

ننوه أولاً أن هذه الخواص صحيحة من أجل أي أساس.

(1) إذا أزحنا فاصلة العدد M إلى اليمين (أو اليسار) n مرتبة فإن ذلك ينتج إضافة (أو طرح) عدد صحيح n إلى قيمة لوغاريتم M.

(2) لوغاريتم جداء عددين يساوي مجموع لوغاريتميهما أي:

$$\text{Log}\,(xy) = \text{Log}\,x + \text{Log}\,y$$

وهكذا فإن:

$$\text{Log}_{10}\,(4 \times 7) = \text{Log}_{10}4 + \text{Log}_{10}7 = 0.60206 + 0.84510 = 1.44716$$

(3) لوغاريتم حاصل قسمة عددين يساوي لوغاريتم **الصورة** مطروحاً منه لوغاريتم **المخرج**، أي: $\text{Log}\,\frac{x}{y} = \text{Log}x - \text{Log}y$، وهكذا فإن:

$$\text{Log}_{10}\ \frac{4}{7} = \text{Log}_{10}4 - \text{Log}_{10}7 = 0.60206 - 0.84510 + 10 - 10 = 9.75696 - 10$$

ونشترط هنا ألا يكون المخرج صفراً وألا تكون الصورة صفراً.

(4) لوغاريتم عدد x مرفوع إلى قوة n يساوي n مضروباً في لوغاريتم العدد، أي $\text{Log}\,x^n = n\,\text{Log}\,x$ وهكذا فإن:

$$\text{Log}_{10}7^2 = 2\,\text{Log}_{10}7 = 2 \times 0.84510 = 1.69020$$

(5) لوغاريتم جذر يعطى بالعلاقة $\text{Log}\ \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n}\,\text{Log}\,x$.

(6) لوغاريتم الصفر غير معرف.

(7) نهاية لوغاريتم عدد يسعى إلى الصفر هو عدد يسعى إلى اللانهاية السالبة.

(8) **تغيير الأساس**: تعطى العلاقة بين لوغاريتم عدد بالنسبة لأساس ولوغاريتمه بالنسبة لأساس آخر بالشكل $\text{Log}_b\text{N} = \text{Log}_a\text{N}\,.\,\text{Log}_b a$، وهكذا فإن $\text{Log}_{10}\text{N} = \text{Log}_e\text{N}\,.\,\text{Log}_{10}e$، كما أن $\text{Log}_e\text{N} = \text{Log}_{10}\text{N}\,.\,\text{Log}_e 10$. ونسمي العدد $\text{Log}_b a$ الذي ينقلنا من لوغاريتم بالنسبة لأساس إلى لوغاريتم آخر **مقياس الانتقال**. وهكذا فإن مقياس الانتقال من اللوغاريتم العشري إلى اللوغاريتم الطبيعي هو: $\text{Log}_{10}e = 0.434294...$

ويتم حساب اللوغاريتم بالاعتماد على المتسلسلة:

$$\text{Log}_e(N + 1) = \text{Log}_e N + 2[\frac{1}{2N + 1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2N + 1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2N + 1)^5} + \ldots]$$

التي تتقارب من أجل جميع قيم N.

. $\text{Log}_{10}(10^n.k) = \text{Log}_{10}10^m + \log_{10}k = n + \text{Log}_{10}k$ (9)

● **اللوغاريتم الطبيعي:**

انظر **اللوغاريتم النيبري** أدناه.

● **اللوغاريتم العادي (العشري):**

هو اللوغاريتم الذي يستخدم دوماً العدد 10 على أنه الأساس.

● **لوغاريتم العدد العقدي:**

نسمي العدد w لوغاريتم العدد z بالنسبة للأساس e إذا كان $z = e^w$.

فإذا كتبنا z بالشكل:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

فإننا نجد أن $\text{Log}(x + iy) = i\theta + \text{Log}\, r$ حيث θ هي **عمدة** z بينما r هي القيمة المطلقة للعدد z أي أن $\text{Log}\, z = \text{Log}\,|z| + i \arg z$.

انظر **عقدي ـ الشكل القطبي**؛ وانظر **أويلر ـ صيغة أويلر**.

وهكذا نجد أن لوغاريتم العدد العقدي هو دالة كثيرة القيم لأن عمدة العدد العقدي كثيرة القيم. بما أن $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$، فإن $\text{Log}(-1) = i\pi$ كما أن $\text{Log}(-n) = i\pi + \text{Log}\, n$ حيث n هو عدد موجب.

وبشكل عام فإن $\text{Log}(-n) = (2k + 1)\pi i + \text{Log}\, n$ حيث k هو عدد صحيح. كما أن معرفة لوغاريتم العدد العقدي z بالنسبة للأساس e يمكننا من معرفة اللوغاريتم للعدد z بالنسبة لأي أساس آخر.

● **اللوغاريتم النيبري:**

هو اللوغاريتم الذي يستخدم العدد $e = 2.71828\ldots$ كأساس. ويسمى

هذا اللوغاريتم أحياناً اللوغاريتم الطبيعي ونكتبه بالشكل $Log_e x$ تمييزاً له عن اللوغاريتم العشري. ونظراً لخواص اللوغاريتم الأساسية والمهمة فإنه كثيراً ما يستخدم لحساب وإنجاز عمليات القسمة والضرب والرفع والجذر المعقدة.

لوغاريتمي LOGARITHMIC

● **احداثيات لوغاريتمية:**

انظر احداثيات.

● **تحدب لوغاريتمي:**

انظر محدب ـ دالة محدبة لوغاريتمياً.

● **تحويل لوغاريتمي (إحصاء):**

يكون لوغاريتم العنصر العشوائي X أحياناً موزعاً بشكل طبيعي (بينما لا يكون X نفسه موزعاً بشكل طبيعي) وبالتالي فإن التحويل الذي يستبدل بـ X لـوغاريتم X يستخدم عادة للسماح لنا بتطبيق نظرية التوزيع الطبيعي.

انظر طبيعي اللوغاريتم ـ توزيع طبيعي اللوغاريتم.

● **جيب لـوغاريتمي، ظـل لوغـاريتمي، جيب تمام لـوغاريتمي، قـاطـع لوغاريتمي، قاطع تمام لوغاريتمي:**

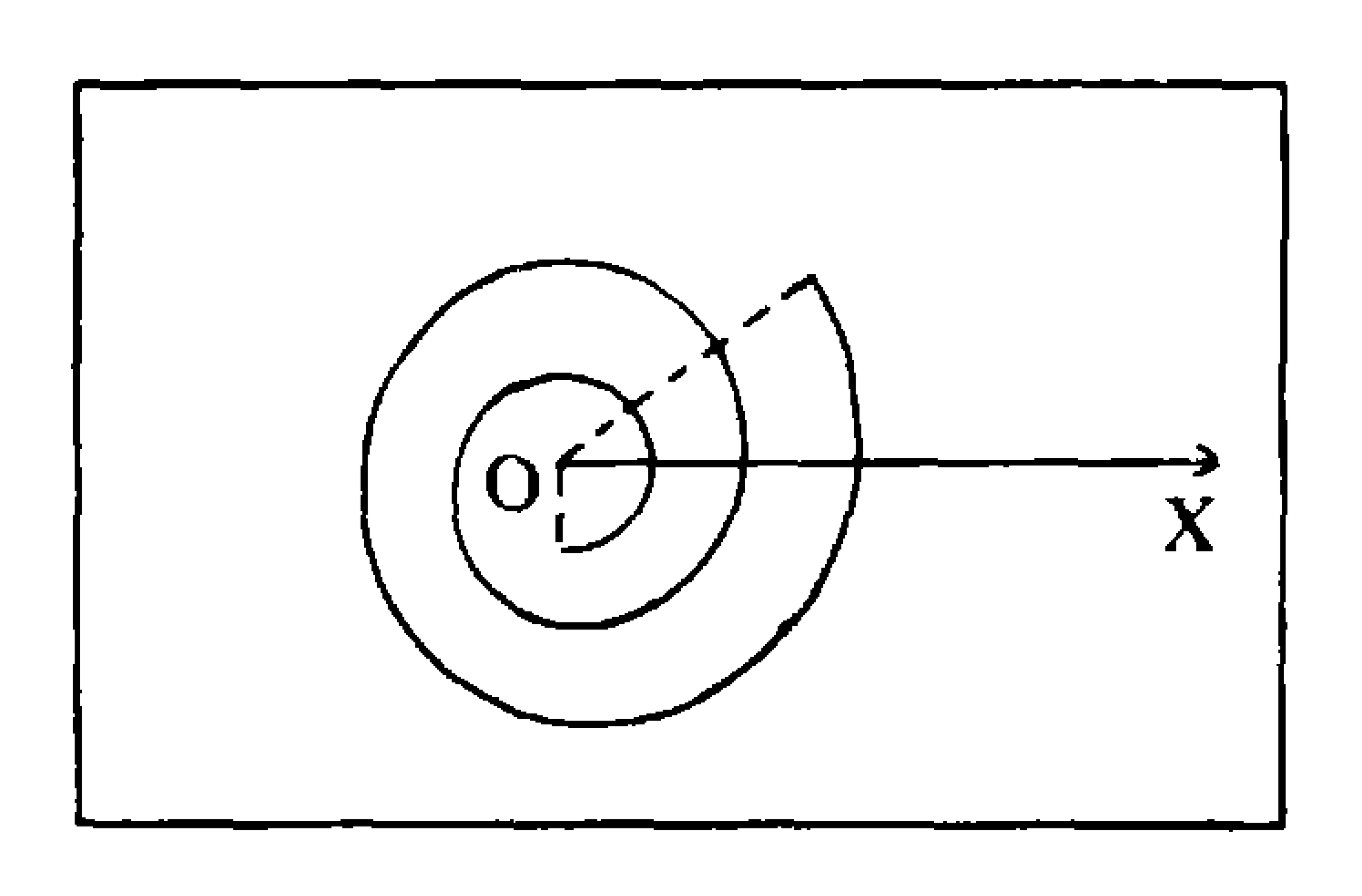
للحصول على أي مقدار من هذه المقادير نأخذ لوغاريتم النسبة المثلثية الموافقة فالجيب اللوغاريتمي مثلاً هو لوغاريتم الجيب وهكذا.

● **حل لوغاريتمي للمثلثيات:**

يقصد بـ حل المثلث هنا إيجاد جميع عناصر المثلث (زواياه وأضلاعه) بعد معرفة بعض العناصر. أما الحل اللوغاريتمي للمثلثيات فنعني به حل المثلث باستخدام اللوغاريتمات والعلاقات التي تمكننا من استخدام اللوغاريتم، ومن الواضح أن هذه العلاقات يجب أن تعتمد على الضرب والقسمة.

● **حلزون لوغاريتمي:**

هو منحن مستوى تتناسب فيه زاوية نصف القطر المتجهي لنقطة مع



لوغاريتم نصف القطر المتجهي. وتكتب معادلة هذا المنحنى قطبياً بالشكل: $\log r = a\phi$. ويسمى هذا المنحنى أحياناً حلزوناً سوقياً أو حلزوناً متساوي الزاوية.

ولأنه يحقق خاصة مهمة وهي أن المماس لهذا المنحنى في أية نقطة منه يصنع زاوية ثابتة مع نصف القطر المتجهي في تلك النقطة، ويتم التحقق من ذلك بأخذ المشتق لمعادلة المنحنى أي $a = \frac{r'}{r}$ وبملاحظة أن ظل الزاوية بين المماس للمنحنى في نقطة ونصف القطر المتجهي الموافق هو $\frac{r'}{r}$.

- **دالة لوغاريتمية للمتغير العقدي:**

من الممكن أن نعرف الدالة $\log z$ على أنها الدالة المعاكسة للدالة الأسية، أي أنه إذا كان $z = e^w$ فإن $w = \log z$ بالتعريف. كما يمكن تعريف اللوغاريتم بالعلاقة $\log z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ حيث تتم المكاملة على أي طريق لا يمر بنقطة التفرع $z = 0$ ويمكن أيضاً تعريف اللوغاريتم بالدالة:

$$f(z) = (z - 1) - \frac{1}{2}(z - 1)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z - 1)^n + \ldots$$

مع جميع استمراراتها (امتداداتها) التحليلية.

إن الدالة اللوغاريتمية هي دالة متضاعفة القيمة بشكل لا نهائي. فإذا رمزنا بـ $\operatorname{Log} z$ للفرع الرئيسي (أي وحيد القيمة) فإن جميع قيم اللوغاريتم تعطى بالعلاقة $\log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i$ حيث $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. الفرع الرئيسي للدالة $\log z$ هي دالة تحليلية وحيدة القيمة للمتغير العقدي $z = x + iy$ معرفة على جميع نقط المستوى العقدي مقطوعاً منه الجزء السالب من المحور ox وبحيث يتطابق $\log z$ $\log x$ على طول الجزء الموجب من المحور ox.

- **رسم بياني لوغاريتمي (أو رسم لوغاريتمي):**

وهو نظام لرسم المنحنيات بحيث يتم رسم المنحنيات التي معادلتها

$y = kx^n$ على شكل مستقيمات. ويتم ذلك بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة السابقة لنحصل على $\log y = n \log x + \log k$ وهنا نعتبر أن $\log x$ هو المتغير المستقل وأن $\log y$ هو المتغير التابع واحداثيات أي نقطة على المستقيم تعطى بالزوج $(\log x, \log y)$ وهكذا فالنقطة التي فصلها هو $\log x$ يكون ترتيبها $\log y$ وعندئذ فإن إيجاد y يتم بأخذ مقابل اللوغاريتم (عكس اللوغاريتم) للعدد $\log y$. كما أن إيجاد x يتم بنفس الأسلوب. ونشير هنا أنه لو استخدمنا ورقاً لوغاريتمياً فلا حاجة عندئذ لمقابل اللوغاريتم (عكس اللوغاريتم) لمعرفة x أو y.

- **كمون لوغاريتمي:**

هو كمون يعتمد على قوة تتغير عكساً بالنسبة للمسافة، وليس عكساً مع مربع المسافة كما هي الحال في قانون نيوتن للجاذبية وقانون كولومب للشحنات النقطية وقانون قوى التجاذب بين الأقطاب المغناطيسية المنعزلة. والأمثلة على الكمون اللوغاريتمي كثيرة أشهرها: حقل القوة المولد بسلك مستقيم مشحون بشكل منتظم طوله لا نهاية. فإذا أخذنا محورا oz على طول هذا السلك نجد أن القوة الناتجة عن شحنة الوحدة الواقعة على المستقيم في نقطة M تبعد عن المستقيم بمقدار r هي $(\frac{k}{r})\rho_1$ حيث k هو ثابت و ρ_1 هو متجه الوحدة في النقطة M وله اتجاه العمود على السلك باتجاه النقطة M.

- **مشتق لوغاريتمي لدالة:**

المشتق اللوغاريتمي لدالة f(z) يعطى بالعلاقة

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \qquad \frac{d}{dz}(\log f(z)).$$

- **معادلة لوغاريتمية:**

انظر معادلة ـ معادلة لوغاريتمية.

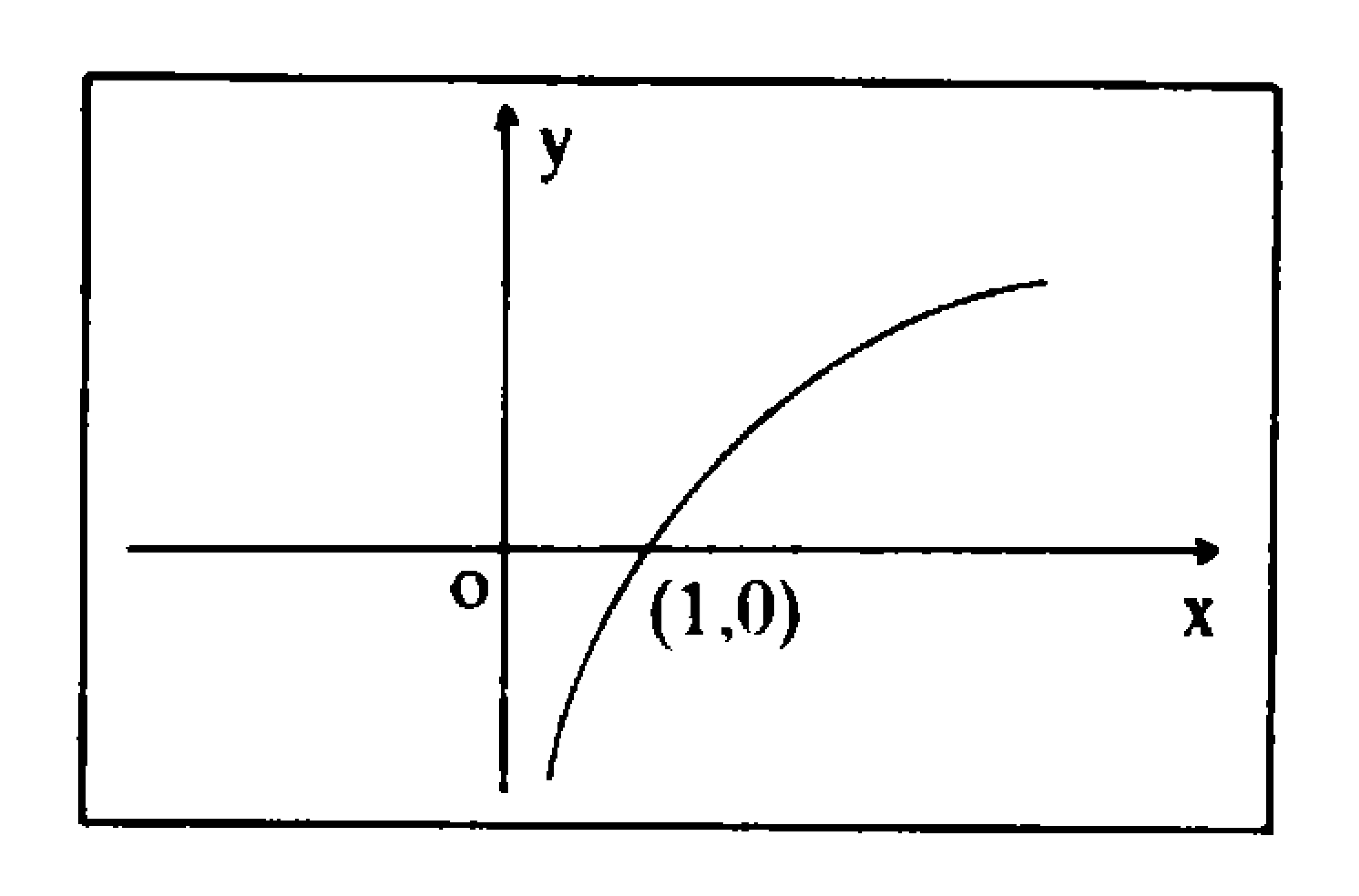
- **مفاضلة لوغاريتمية:**

انظر مفاضلة ـ مفاضلة لوغاريتمية.

- **منحنى لوغاريتمي:**

هو المحل الهندسي للمعادلة الديكارتية $y = \log_a x$ حيث $a > 1$. يمر هذا المنحنى من النقطة (1,0) ويقارب المحور Oy في الجزء السالب منه، وتتزايد

تراتيب النقط على هذا المنحنى حسابياً، بينما تتزايد فصول النقط هندسياً، أي أنه لو كانت تراتيب ثلاث نقط هي 1,2,3 فإن فصول هذه النقط هي a, a^2, a^3 على الترتيب.



● **ورق احداثي لوغاريتمي:**

هو ورق مسطر بحيث تبعد الأسطر الموازية للمحور ox والمحور oy عن نقطة الأصل o أبعاداً تتناسب مع لوغاريتمات الأعداد ...,1,2,3 وهكذا فإن احداثيات نقطة في الورق الاحداثي اللوغاريتمي ليست هي أبعاد النقطة عن المحورين الاحداثيين، بل هي مقابلات اللوغاريتم (أو عكس اللوغاريتم). ويسمى هذا التدريج عادة بـ **التدريج اللوغاريتمي**. بينما يسمى التدريج العادي الذي يشير إلى المسافات الحقيقية عن المحاور وليس لوغاريتماتها بـ **التدريج المنتظم**.

● **ورق احداثي نصف لوغاريتمي:**

هو ورق احداثي نستخدم على أحد محوريه التدريج (السلّم) المنتظم ونستخدم على المحور الآخر التدريج (السلم) اللوغاريتمي. وهذا الورق مخصص للرسم البياني لمعادلات من الشكل: $y = ck^x$. فإذا أخذنا لوغاريتم الطرفين لهذه المعادلة نجد $\log y = \log c + x \log k$ ويؤخذ $\log y$ هنا على أنه متغير واحد نسميه u وعندئذ يتم رسم بيان المعادلة $u = \log c + x \log k$.

لولب — HELIX

هو منحن يقع على أسطوانة أو مخروط بحيث يقطع مولدات الأسطوانة (أو المخروط) في زاوية ثابتة. وإذا وقع اللولب على أسطوانة سمي بـ **اللولب الأسطواني**. أما إذا وقع على مخروط فإنه يسمى بـ **اللولب المخروطي**. و **اللولب الدائري**: هو لولب يقع على أسطوانة دائرية وتكون معادلاته الوسيطية

$x = a \sin \theta, y = a \cos \theta, z = b\theta$، حيث a و b ثوابت و θ الوسيط. (انظر الشكل).

لويلييه، (سيمون انطوان جان)
LHUILIER, SIMON ANTOINE JEAN (1750-1840)

عالم سويسري في الهندسة.

- **مبرهنة لويلييه:**

وهي تربط بين **الفائض الكروي** E وهو مقدار الفرق الموجب بين مجموع زوايا المثلث الكروي و 180°، وبين الأضلاع a,b,c للمثلث الكروي، وتنص المبرهنة على أن:

$$tg\ \tfrac{1}{2} E = [tg\frac{s}{2}\ tg\frac{(s-a)}{2}\ tg\frac{(s-b)}{2}\ tg\frac{(s-c)}{2}]^{\frac{1}{2}}$$

حيث $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

لندلوف، ارنست ليونارد
LINDELOF, ERNST LEONARD (1870-1946)

عالم فنلندي في التحليل والطوبولوجيا.

- **فضاء لندلوف:**

هو فضاء طوبولوجي T يتحقق فيه الشرط التالي: من أجل أي صنف C من المجموعات المفتوحة والتي اتحادها يحتوي T، يوجد صنف C^{*} قابل للعد من المجموعات التي اتحادها يحوي T بحيث يكون أي عنصر من C^{*} هو عنصر من C.

- **مبرهنة لندلوف:**

كل فضاء طوبولوجي يحقق موضوعة قابلية العد الثانية هو فضاء لندلوف.

ليبشيتز، رودلف اوتوسيغيسموند
LIPSCHITZ, RUDOLPH OTTO SIGISMUND (1832-1903)

عالم ألماني في التحليل والجبر ونظرية الأعداد والفيزياء.

● **شرط ليبشيتز:**

نقول بأن الدالة f تحقق شرط ليبشيتز (بثابت K) في النقطة x_0 إذا تحققت المتباينة $|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|$ من أجل جميع قيم x في جوار معين للقيمة x_0. ونقول بأن هذه الدالة تحقق **شرط هولدر** من المرتبة p في النقطة x_0 إذا تحققت المتباينة: $|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|^p$ من أجل جميع قيم x في جوار معين للنقطة x_0. ويسمى هذا الشرط أحياناً شرط ليبشيتز من المرتبة p.

نقول أن الدالة f تحقق شرط ليبشيتز في فترة ما [a,b] إذا تحقق الشرط: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1|$ من أجل جميع قيم x_1 و x_2 في الفترة [a,b]. إذا كان للدالة f مشتق مستمر في كل نقطة من فترة مغلقة [a,b] فإن هذه الدالة تحقق شرط ليبشيتز. وينتج ذلك من العلاقة:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\theta)|\,|x - x_0| \leq M|x - x_0|$$

حيث M هي القيمة العظمى لمشتق f في الفترة المغلقة المعتبرة. أما θ فهي عدد يحقق $a \leq \theta \leq b$.

ليبيغ، هنري ليون
LEBESGUE, HENRI LEON (1875-1941)

هو عالم فرنسي في التحليل الرياضي، ترك أثراً مميزاً في الرياضيات، وذلك من خلال نظرياته في القياس والمكاملة وأعماله في المتسلسلات المثلثية.

● **تكامل ليبيغ:**

نفترض أولاً أن f هي دالة محدودة وقابلة للقياس ومعرفة على مجموعة E قابلة للقياس بمفهوم ليبيغ وذات قياس منته. فإذا كان U,L هما الحدين الأدنى والأعلى للدالة f فإن تكامل ليبيغ $\int_\Omega f(x)dx$ للدالة f على Ω هو بالتعريف نهاية $\sum_{i=1}^{n} y_i\, m(e_i),\ \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\, m(e_i)$، وذلك عندما ينتهي أكبر الأعداد

$y_i - y_{i-1}$ إلى الصفر. حيث تم تقسيم الفترة [L,U] إلى n جزءاً بواسطة متتالية متزايدة من الأعداد هي: $y_0 = L, y_1, y_2, \ldots, y_n = U$. أما $m(e_i)$ فهي قياس المجموعة e_i التي تتكون من جميع النقط x المحققة للشرط $y_{i-1} \leq f(x) < y_i$, $(n = 1,2,\ldots,n-1)$ إذا لم تكن الدالة f محدودة وعرفنا f_n^m على النحو التالي:

$$f_n^m = \begin{cases} f(x) & [n\ f(x) \leq m \text{ إذا كان}] \\ m & [f(x) > m \text{ إذا كان}] \\ n & [f(x) < n \text{ إذا كان}] \end{cases}$$

عندئذ فإن تكامل ليبيغ لهذه الدالة يكون معرفاً بالشكل:

$$\int_{\Omega} f(x)dx = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \int_{\Omega} f_n^m(x)dx$$

علماً بأن النهاية موجودة.

إذا لم يكن للمجموعة Ω قياس منته وكان المقدار $\int_{\Omega \cap I} f(x)dx$ ينتهي إلى نهاية معينة عندما تتزايد حدود الفترة I بلا حدود وبأي صورة. عندئذ فإن هذه النهاية تعرف على أنها $\int_{\Omega} f(x)dx$ يكون للدالة ϕ المعرفة على المجموعة E المحتواة في الفترة I تكامل ليبيغ على E إذا وفقط إذا كان يوجد متتالية $\{f_n\}$ من الدوال الدرجية (أو المستمرة) بحيث أن $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \phi(x)$ من أجل جميع قيم x في I تقريباً وبحيث $\lim_{m,n\to\infty} \int_I |f_n(x) - f_m(x)|dx = 0$ نأخذ هنا $\phi(x)$ مساوياً للصفر من أجل النقط x غير المنتمية إلى E. في هذه الحالة فإن النهاية $\lim_{n\to\infty} \int_I f(x)dx$ تكون موجودة وتمثل تكامل ليبيغ للدالة ϕ على E.

(انظر **قابل للمكاملة** ــ دالة قابلة للمكاملة؛ **قابل للقياس** ــ دالة قابلة للقياس). وننوه هنا أنه إذا كان تكامل ريمان معرفاً لدالة فإن تكامل ليبيغ يكون حتماً معرفاً لهذه الدالة. أما العكس فليس صحيحاً بالضرورة.

- **قياس ليبيغ**:

انظر **قياس** ــ قياس ليبيغ.

● مبرهنة ليبيغ للتقارب:

لنفرض أن m قياس جمعي عدياً على جبرية من σ لمجموعات جزئية من مجموعة T، ولنفرض أن g غير سالبة وقابلة للقياس بحيث $\int_T g\,dm < +\infty$ وأن $\{S_n\}$ هي متوالية دوال قابلة للقياس بحيث يكون $|S_n(x)| \leq g(x)$ على T. عندئذ فإن أي S_n تكون قابلة للمكاملة، وإذا كان يوجد S بحيث $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S$ تقريباً في كل مكان على T فإن $\int_T S\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_T S_n dm$ إذا استبدلنا بالفرضية $\int_T g\,dm < +\infty$ الفرضية $\int_T g^p dm < +\infty$ فإن ما نستنتجه يصبح كالتالي: إن $|S_n|^p$ قابلة للمكاملة من أجل أي n، ان $|S|^p$ قابلة للمكاملة كما أن $\lim_{n\to\infty} \int_T |S - S_n|^p dm = 0$.

انظر **محدود** ـ مبرهنة التقارب المحدود؛ رتيب ـ مبرهنة التقارب الرتيب؛ **متسلسلة** ـ متكاملة المتسلسلات اللامنتهية.

ليف

إذا كان $f{:}M \to N$ غمراً بين منطويين وكانت x نقطة في N فإن الليف فوق x هو المنطوى الجزئي $f^{-1}(x)$ في $\overline{M}$.

انظر **رزمة ألياف**.

ليفشتز، سلمون — LEFSCHETZ, SOLOMON (1884-1972)

عالم روسي ـ أميركي في الهندسة النظرية والهندسة الجبرية والطوبولوجيا. عمل أيضاً في المعادلات التفاضلية ونظرية التحكم والميكانيك اللاخطي.

LIE, MARIUS SOPHUS (1842-1899) — لي، ماريوس سوفوس

عـالـم نرويجي في التحليل والهندسة ونظرية الزمر. وقد عمل أبحاثاً مهمة في لامتغيرات التحويلات. وطوّر نظرية زمر التحويلات.

- **جبرية لي:**

انظر جبرية.

- **زمرة لي:**

هي زمرة طوبولوجية يمكن أن تعطى لها بنية تحليلية بحيث تكون احداثيات الجداء xy دوالاً تحليلية في احداثيات العنصـرين x و y كما أن احداثيات العنصر x^{-1} المعاكس للعنصر x هي أيضاً دوال تحليلية في x.

انظر اقليدي ــ فضاء اقليدي محلياً.

LIOUVILLE, JOSEPH (1809-1882) — ليوفيل، جوزيف

عالم فرنسي في التحليل والهندسة. وهو أول من برهن وجود الأعداد المتسامية.

- **دالة ليوفيل:**

هي دالة معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة بالشكل: $\lambda(1) = 1$ و $\lambda(n) = (-1)^{a_1 + a_2 + \dots + a_r}$.

إذا كان $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$

حيث $p_1, \dots, p_r$ هي أعداد أولية.

- **متسلسلة ليوفيل ــ نيومان (معادلات تكاملية):**

هي المتسلسلة: $y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \psi_n(x)$

حيث $\psi_1(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt$

و $\psi_n(x) = \int_a^b K(x,t)\psi_{n-1}(t)dt \ (n = 2,3,\dots)$

والدالة $y(x)$ عندئذ هي حل المعادلة: $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt$

إذا تحققت الشروط التالية:

(1) $K(x,y)$ حقيقية ومستمرة وغير مطابقة للصفر في المربع $a \leq y \leq b, a \leq x \leq b$.

(2) $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ حيث M هو أصغر حد أعلى للمقدار $|K(x,y)|$ في المربع السابق.

(3) $f(x) \not\equiv 0$ حقيقي ومستمر في الفترة $a \leq x \leq b$.

انظر **نواة** ــ نواة مكررة.

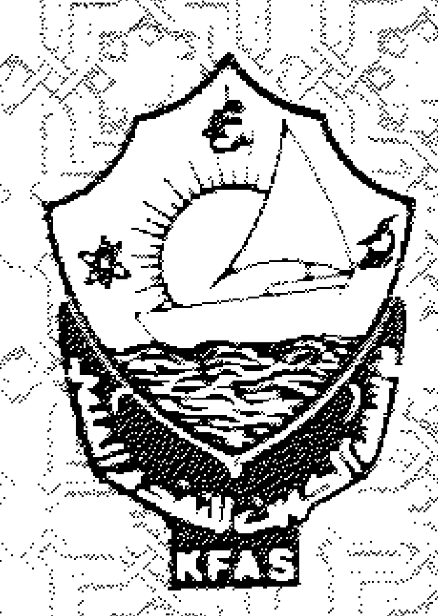
● **عدد ليوفيلي**:

هو عدد أصم X يحقق الشرط التالي:

من أجل أي عدد صحيح n هناك عدد منطق $\frac{p}{q}(q > 1)$ بحيث $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$. ونلاحظ هنا أن جميع أعداد ليوفيل هي أعداد متسامية (انظر **أصم** ــ عدد أصم). كما نشير هنا إلى أن هناك عدداً غير منته من الأعداد المنطقة مقابل أي عدد أصم I بحيث $|I - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ كما أن $\sqrt{5}$ هو أكبر عدد يمكن استخدامه من أجل أي عدد I. وهناك مقابل أي **عدد جبري** A من الدرجة n عدد موجب c يقابله عدد غير منته من الأعداد المنطقة $\frac{p}{2}$ بحيث $|A - \frac{p}{}| < \frac{c}{q^n}$ أضف إلى ذلك فإنه يوجد بين كل عددين حقيقيين عدد ليوفيلي. وفي الحقيقة فإن مجموعة أعداد ليوفيلي هي مجموعة من **الطائفة الثانية** على الرغم من أن قياس هذه المجموعة هو صفر.

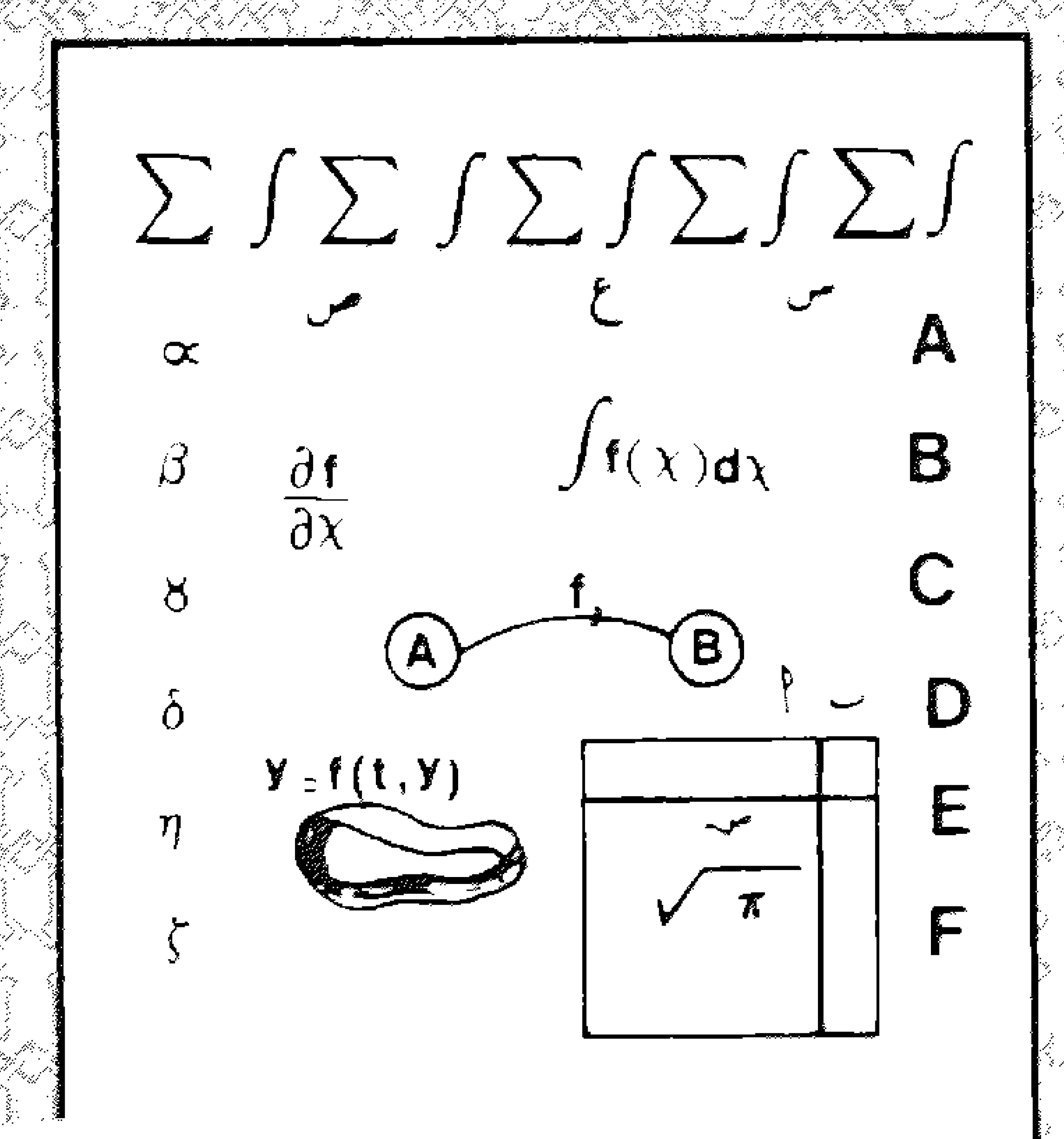
● **مبرهنة ليوفيل**: إذا كانت f **دالة تحليلية صحيحة** للمتغير العقدي z وكانت هذه الدالة محدودة فإن f تكون ثابتة.





KUWAIT FOUNDATION
FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCES

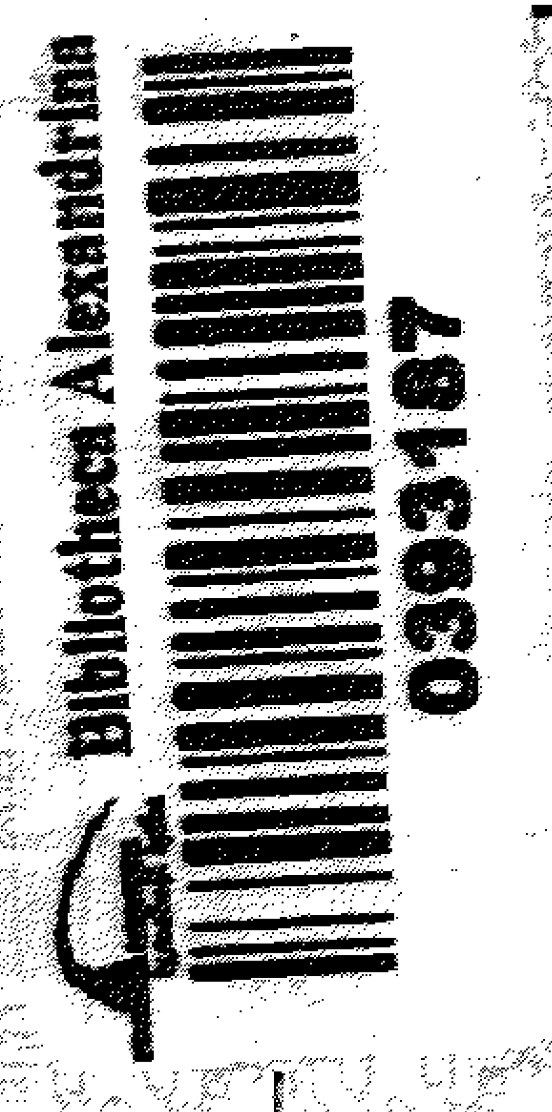
Authorship and Translation Directorate



Kuwait Science Encyclopedia

MATHEMATICS

Volume Three



Authors Committee
Head:
Dr. Fozi Mustafa Dannan
B.Sc. Ph.D.

Members:
Dr. Saad Taha Bakir
B.Sc. Ph.D

Dr. Saber Nasr Elaydi
B.Sc. M.Sc. Ph.D

Dr. Hani Reda Farran
Licence C.A.P.E.S. Ph.D.

Consultant:
Dr. Adnan A. Al-Aqeel
B.Sc. Ph.D.

Book and Author Programme
First Edition, 1984
Kuwait

طباعة ذات السلاسل ـ الكويت